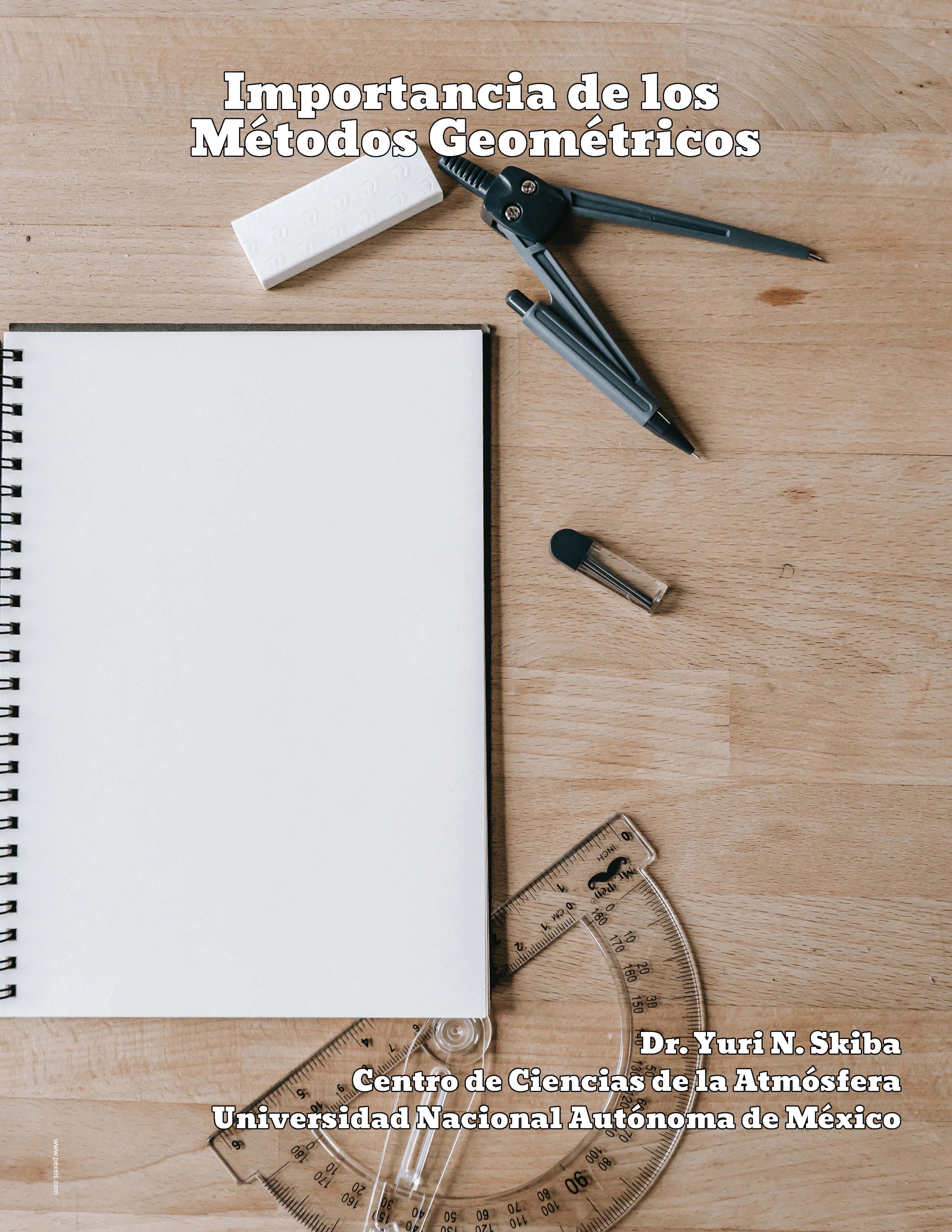
Importancia de los Métodos Geométricos



Dr. Yuri N. Skiba
Centro de Ciencias de la Atmósfera
Universidad Nacional Autónoma de México

Abstract

A visual demonstration that is not formally proof of a particular statement is sometimes called "proof without words.̈In general, wordless demonstrations are images or diagrams that help the observer see why the statement may be true, and provide visual cues to stimulate mathematical thinking. In some cases, a dull test can be supplemented by a geometric analogue so simple and beautiful that the truth of a statement is almost evident at first glance. The objective of the work is to show how some visualization techniques can be used to produce images that help students understand mathematical ideas, proofs and arguments. Eight examples are considered.

Resumen

Una demostración visual, que no es evidencia formal de una declaración particular, a veces se llama "demostración sin palabras". En general, las demostraciones sin palabras son imágenes o diagramas que ayudan al observador ver por qué la declaración puede ser cierta, y proporcionar pistas visuales para estimular el pensamiento matemático. En algunos casos, una prueba sin brillo se puede complementar con un análogo geométrico tan simple y hermoso que la verdad de una declaración es casi evidente a primera vista. El objetivo del trabajo es mostrar cómo se pueden emplear algunas técnicas de visualización para producir imágenes que ayudan a los estudiantes a comprender las ideas matemáticas, pruebas y argumentos. Se consideran ocho ejemplos.

Es innegable que el pensamiento geométrico, desarrollado por la geometría, tiene un claro paralelismo en otras áreas temáticas y la investigación puede servir como una analogía con éxito en la obtención de resultados útiles, conclusiones, principios y consideraciones de los diversos campos del conocimiento. La propia geometría como ciencia comienza con la famosa obra .Elementos de Euclides", escrita por el matemático griego Euclides cerca del 300 a.C. en Alejandría. Como una dirección científica, implica el estudio de las conexiones lógicas entre conceptos, donde el papel central se da al uso de la intuición visual, es decir, la geometría se basa en las representaciones espaciales.

En matemáticas, una demostración o bien una prueba es un argumento deductivo para asegurar la verdad de una proposición matemática. En la argumentación se pueden usar otras afirmaciones previamente establecidas, tales como teoremas o lemas. En principio una demostración se puede rastrear hasta afirmaciones generalmente aceptadas, conocidas como axiomas.

Las representaciones geométricas-visuales son de particular importancia en el proceso de solución de problemas matemáticos. No hay duda de que la forma geométrica del pensamiento es de alto grado de abstracción, y por lo tanto se trata de una colección de pensamiento espacial, proporcionando operación espacial con las imágenes, y el pensamiento lógico, que permite el establecimiento de relaciones adecuadas entre las imágenes.

Si bien no es una prueba formal, la prueba visual de una determinada declaración se denomina "*demostración sin palabras*". Generalmente, las pruebas sin palabras son imágenes o diagramas que lo ayudan a comprender por qué una afirmación puede ser cierta y brindan claves visuales para fomentar el pensamiento matemático. A veces, una demostración mediocre se puede complementar con un análogo geométrico tan simple y elegante que la verdad de la afirmación es casi obvia en seguida. El propósito del artículo es mostrar cómo algunas formas geométricas se pueden utilizar para crear imágenes que ayudarán a entender ideas matemáticas, evidencias y argumentos. Con este fin, veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 (Teorema de Pitágoras). La Figura 1 es un ejemplo de la histórica demostración visual del Teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo con lados (a, b, c)

$$a^2 + b^2 = c^2 \ (1)$$

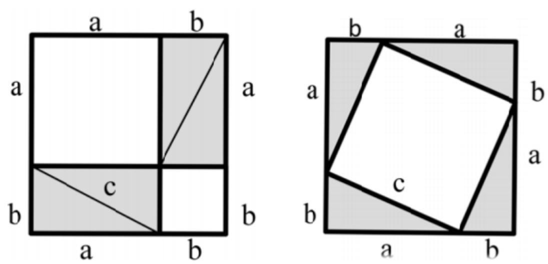


Fig. 1 (autor desconocido). Teorema de Pitágoras:$a^2 + b^2 = c^2$.

Ejemplo 2 (Suma de una progresión geométrica). La Figura 2 es otro ejemplo que demuestra el valor de la suma

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ... + \frac{1}{4^n} + ... \ (2)$$

de la progresión geométrica ($S = \frac{1}{3}$).
En efecto, supongamos que el área del triángulo equilátero es uno, y dividamos el triángulo en cuatro triángulos equiláteros iguales. El área del triángulo central (blanco) es $\frac{1}{4}$. Luego vamos a repetir sin fin el mismo procedimiento con los triángulos superiores obtenidos. Cada término de la progresión coincide con el área del triángulo correspondiente. Al sumar las áreas de los triángulos blancos obtenemos $S = \frac{1}{3}$ (Fig.2).

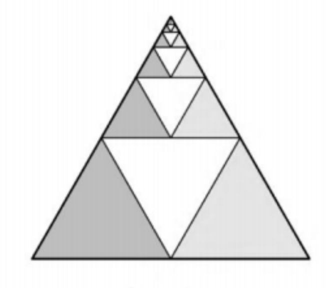


Fig.2 (Rick Mabry). Cálculo de la suma de la progresión geométrica (2) usando el triángulo equilátero con el área igual a uno.

Ejemplo 3 (Suma de cualquier progresión geométrica). En general, usando las relaciones entre los lados de triángulos semejantes es fácil demostrar que la suma de una progresión geométrica

$$S = 1 + r + r^2 + r^3 + ... + r^n + ... \ (3)$$

es $1/(1-r)$. En efecto (véase Fig.3),

$$\frac{1+r+r^2+r^3+...+r^n+...}{1} = \frac{1}{1-r}$$

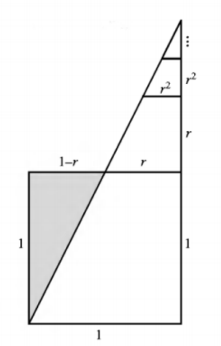


Fig.3 (Benjamin G. Klein & Irl C. Bivens). Suma de una progresión geométrica usando triángulos semejantes.

Ejemplo 4 (Desigualdad de las medias aritmética y geométrica). Sean $a > 0$ y $b > 0$. La desigualdad

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (4)$$

se demuestra sin palabras.

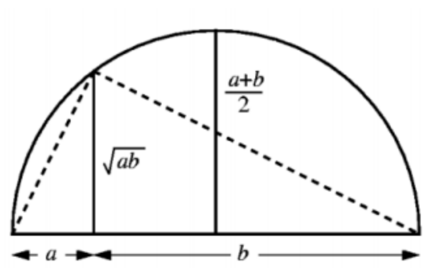


Fig.4 (Charles D. Gallant). Desigualdad de las medias aritmética y geométrica.

En otra demostración geométrica, basta construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea $(a+b)/2$ y un cateto sea $(a-b)/2$. Entonces, por el teorema de Pitágoras, el otro cateto será $\sqrt{ab}$.

Ejemplo 5 (Las fórmulas de la tangente del ángulo mitad). Las formulas

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \quad (5)$$

se deducen directamente de la figura 5.

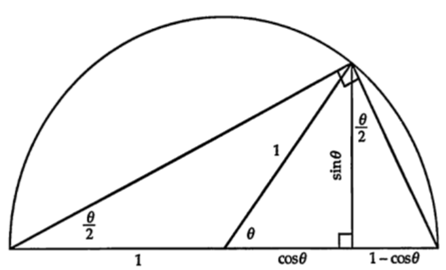


Fig.5 (R.J. Walker). Las fórmulas de la tangente del ángulo mitad

Ejemplo 6 (La distancia entre un punto y una línea). La distancia d entre un punto (a, b) y una línea se obtiene de dos triángulos rectángulos (Fig.6):

$$\frac{d}{1} = \frac{|ma+c-b|}{\sqrt{1+m^2}} \quad (6)$$

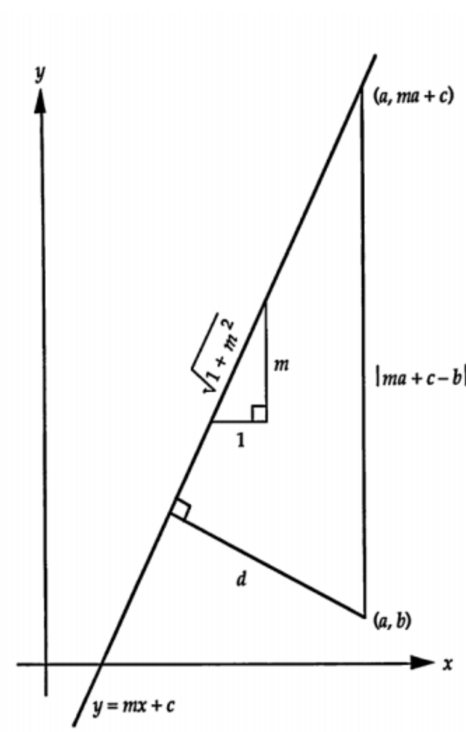


Fig.6 (R.L. Eisenman). La distancia entre un punto y una línea.

Ejemplo 7 (Las fórmulas de doble ángulo). Los triángulos ACD y ABC son semejantes. Por lo tanto, $CD/AC = BC/AB$, es decir, $\sin 2\theta/2\cos\theta = 2\sin\theta/2$, y $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ (Fig.7). Por otra parte, $AD/AC = AC/AB$, es decir, $(1+\cos 2\theta)/2\cos\theta = 2\cos\theta/2$, y $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.

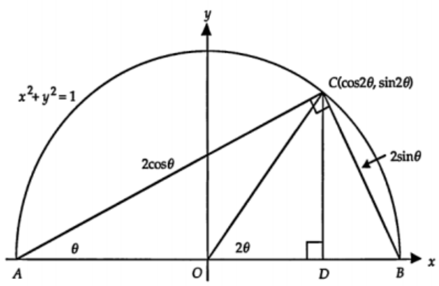


Fig.7 (Roger B. Nelsen). Las fórmulas de doble ángulo.

Se pueden encontrar más ejemplos en Nelsen (1993, 2000).

Ejemplo 8 (Teorema de Napoleón). Si sobre cada lado de un triángulo arbitrario se construyen respectivos triángulos equiláteros, tanto hacia el exterior (Fig.8) como hacia el interior del triángulo, entonces los centros de dichos triángulos forman un triángulo equilátero NMP.

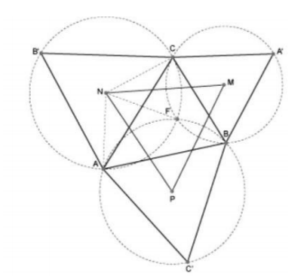


Fig.8 (Mario Dalcín, 2005). Teorema de Napoleón.

Es preciso notar que los círculos circunscritos a los triángulos equiláteros pasan por un mismo punto F, la línea NP es mediatriz del ángulo ANF, la línea NM es mediatriz del ángulo FNC, el ángulo ANC es 120° y, por lo tanto, el ángulo PNM es 60° (Fig.8). De la misma manera se demuestra que los otros dos ángulos del triángulo NMP también son iguales a 60°.

Referencias

Dalcín, M., El Teorema de Napoleón. Instituto de Profesores Artigas. Uruguay, 2005 (archivo 2121-6240-1-PB.pdf online).

Nelsen, R.B., Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking. The Mathematical Association of America, 1993.

Nelsen, R.B., Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking. The Mathematical Association of America, 2000.