Método Montante: Una alternativa para la solución en la intercepción de dos ecuaciones lineales dentro de método gráfico

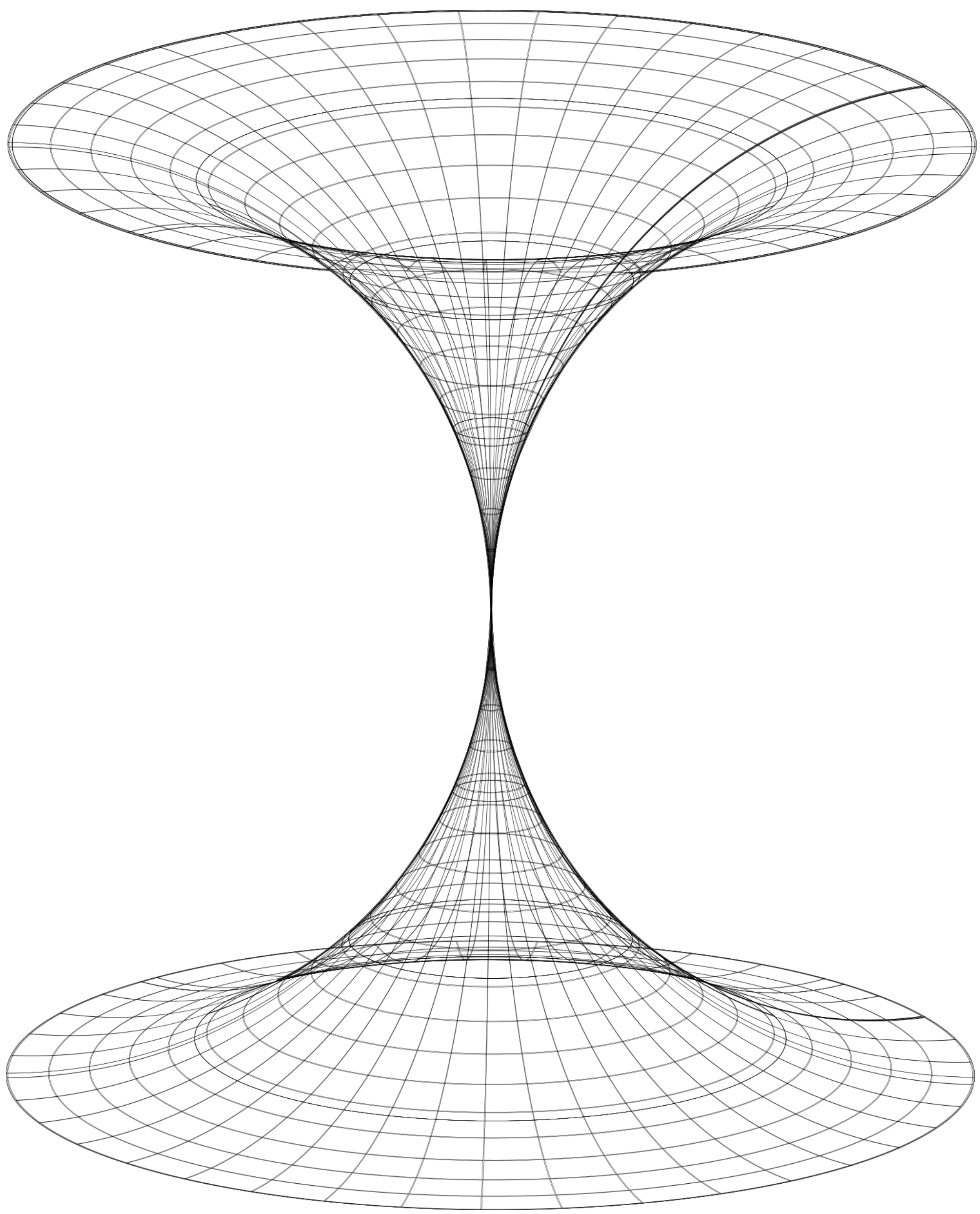

Imagen de Gordon Johnson en pixabay.com

Mtro. Marco Antonio González Morales

Departamento de Ciencias Tecnológicas del Centro Universitario de la Ciénega de la Universidad de Guadalajara

Resumen

El uso de modelos matemáticos para la toma de decisiones en el ámbito de la planeación de las empresas, es una aportación que ayuda a la gerencia para pronosticar un mejor manejo de los recursos disponibles dentro de las empresas, ya sean de carácter material, humano o financiero. Es por ello que el uso correcto de los diversos métodos disponibles, ayudan a la administración a una mejor optimización de dichos recursos, con dos finalidades primordiales, la de minimizar el costo para la trasformación de esos recursos en productos y/o servicios, y la de maximizar el margen de utilidad o ganancia.

Es por esto, que este trabajo se abordará un método poco conocido y difundido (Montante) para aplicarse dentro del método gráfico para encontrar la solución de una intercepción de un sistema de ecuaciones lineales, el cual representaría una posible solución óptima para su análisis en la toma de decisiones.

Palabras claves. *modelo, método, variables, optimización, investigación, operaciones.*

Abstract

The use of mathematical models for decision making in the field of business planning is a contribution that helps management to forecast a better management of available resources within companies, whether they are material, human or financial. That is why the correct use of the various methods available, help the administration to better optimize these resources, with two main purposes, to minimize the cost of transforming these resources into products and/or services, and the to maximize profit or profit margin.

For this reason, this work will address a little-known and widespread method (Montante) to be applied within the graphical method to find the solution of an intercept of a system of linear equations, which would represent a possible optimal solution for its analysis in the decision making.

Keywords. model, method, variables, optimization, research, operations.

Introducción

La Investigación de operaciones, aunque originalmente no se llamó así, es de origen relativamente reciente. Los principios fundamentales de ésta surgieron por dos razones; la primera está relacionada con la oportunidad que los científicos tuvieron de atacar nuevos problemas del campo militar durante la Segunda Guerra Mundial, y la segunda fue la necesidad del estudio científico de los problemas de administración y mejorar la optimización de los recursos limitados dentro de los entes económicos (empresas) hasta el día de hoy. Estas dos causas se combinaron para producir la investigación de operaciones como al día de hoy se la conoce. (Taha, 2012)

En otras palabras, la investigación de operaciones trata de suministrar información analizada y significativa sobre cuestiones tales como “cómo”, “cuándo” y “qué ocurriría si ...”, que tradicionalmente se dejaban a las corazonadas, la intuición, el criterio y las suposiciones afortunadas. Es un enfoque al análisis operacional que permite a los gerentes mejorar la optimización de los recursos disponibles y la habilidad para tomar mejores decisiones.

Hasta el día de hoy, cada vez es más frecuente que los administradores se vuelvan hacia métodos cuantitativos y computadoras para llegar a la solución óptima de problemas que involucran un gran número de alternativas. El estudio de diversos métodos y la forma en que los administradores los usan en el proceso de decisión es la esencia de la ciencia de la administración, entre ellos se encuentra un método poco difundido en México en esta rama de las matemáticas, el método Montante.

Método Montante

En la actualidad hablar de programación lineal e investigación de operaciones u operativa, implica la aplicación de diferentes métodos matemáticos con la finalidad de optimizar los recursos de una empresa o proyecto, en relación a estos métodos matemáticos existe un método poco difundido en la educación de pregrados, pero de gran eficacia en relación a la obtención de resultados dentro de los métodos para la solución de un sistema de ecuaciones lineales, este método es conocido como el método Montante, el cual fue creado por el **Dr. René Mario Montante Pardo** (1933 - 2019), Catedrático Emérito de la Facultada de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL[1] , quien en la entrevista para la revista CIENCIA UANL[2], menciona lo siguiente: "*En 1973 comencé a tratar de resolver determinantes con un método que fuera con puros enteros y lo encontré y le llamé Método Montante. Luego ese mismo método resolvió sistemas de ecuaciones lineales y la inversa de una matriz, calculó la matriz adjunta, resolvió determinantes, sistemas de ecuaciones homogéneas, el Método Montante hizo muchas cosas*" y agregó "*Yo pensé que eran puros determinantes. Pero cuando vi que resolvía ecuaciones lineales y con números enteros, dije: esto va a llegar muy lejos. Y ahora anda en todo el mundo. En la computadora es el más exacto del mundo*"., propuso una manera diferente con el fin de simplificar el área de álgebra matricial, con la obtención de los mismos resultados de un sistema de ecuaciones lineales mediante la combinación de los procedimientos de la eliminación de Gauss-Jordan[3] y la regla de Cramer[4].

Una de las ventajas primordiales del método Montante es que, dentro de sus operaciones básicas, todas se basan en hacer cálculos por medio de determinantes, y en donde no se tiene que realizar operaciones para convertir en la unidad a los valores que serán pivotes y ceros el resto de los valores dentro de la matriz por cada columna como en Gauss-Jordan. Este método nace en el año de 1973 y fue publicado hasta 1976 una vez que se había utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Actualmente el método se usa en diferentes aspectos del álgebra matricial, y es uno de los dos métodos principales que se utilizan, el otro es la eliminación de Gauss-Jordan, pero a diferencia de este método, Montante converge más rápido en sus operaciones, además es más eficiente en sus operaciones en comparación a otros métodos como la regla de Cramer, eliminación de Gauss-Jordan, suma y resta, sustitución, igualación, entre otros.

El método es de gran ayuda para encontrar raíces de varias variables de una forma más convergente en sus cálculos para la

[1] Universidad Autónoma de Nuevo León.

[2] Entrevista al doctor René Mario Montante Pardo por Edmundo Derbez García. Revista CIENCIA UANL / VOL. V, No. 1, ENERO-MARZO 2002. Pág.20.

[3] En matemáticas, la eliminación de Gauss-Jordan, llamada así debido a Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan, es un algoritmo del álgebra lineal para determinar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, encontrar matrices e inversas.

[4] La regla de Cramer es un teorema del álgebra lineal que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes. Recibe este nombre en honor a Gabriel Cramer (1704 - 1752).

[5] Publicado en la editorial McGraw-Hil en un libro titulado "Métodos numéricos". Tomado de la revista CIENCIA UANL / VOL. V, No. 1, ENERO-MARZO 2002. Pág.21.

toma de decisiones, pero de poca difusión, este método ayudaría a toda aquella organización que le implica tomar decisiones para realizar proyectos más concretos en relación a su organización.

Pero, así como tiene sus ventajas muy significativas en su procedimiento, cuenta con una limitación, la cual consiste en que solo se aplica para sistemas de ecuaciones cuadráticas, es decir, sistemas de ecuaciones que tengan el mismo número de ecuaciones que variables (2x2, 3x3, 4x4, etc.).

El modelo matemático en la toma de decisiones

Las técnicas matemáticas constituyen una parte principal de lo que se conoce como Investigación de Operaciones, las cuales son la base para una buena toma de decisión; sin embargo, esto no significa que los estudios prácticos sobre la Investigación de Operaciones, sean en esencia ejercicios de matemáticas. De hecho, con frecuencia el análisis matemático sólo representa una pequeña parte del trabajo que se requiere para la toma de decisiones.

(Thierauf, 1984) menciona que la Investigación de Operaciones hace gran uso de diversos modelos matemáticos. Por lo general, un modelo se define como una *representación o abstracción de un objeto real o de una situación real*. El modelo muestra las relaciones (directas e indirectas) y las interrelaciones de acción y reacción desde el punto de vista de causa y efecto. Ya que un modelo es una abstracción de la realidad, puede parecer menos complejo que la realidad misma. El modelo, para estar completo, debe ser representativo de los aspectos de la realidad que se estén investigando.

Una de las principales razones para desarrollar modelos es descubrir cuáles son las variables importantes o adecuadas. El descubrimiento de las variables adecuadas está estrechamente ligado con la investigación de las relaciones que existen entre las variables. Para investigar estas relaciones, se utilizan técnicas cuantitativas como la estadística y la simulación para la resolución de problemas en las empresas.

Etapas en la formulación del modelo

Establecer la formulación de modelo general dentro de la Investigación de operaciones, el cual sea representativo de un sistema en estudio, con el cual se busca una solución "óptima" dentro del marco de los parámetros del problema, de tal manera que sea útil, siempre y cuando sea realista y simplifique la realidad, (Anderson, Sweeney, Williams, Camm, & Martin, 2011) hacen mención que debe comprender tres etapas para su formulación:

1) Análisis de los datos
2) Desarrollo del modelo
3) Validación del modelo

Los cuales, para su implementación dentro de la Investigación de Operaciones en la práctica, (Taha, 2012) menciona que se deben desarrolla en cinco fases principales que son:

<u>1.- Definición del problema</u>: La primera fase del estudio necesita de una definición del problema, esto indica 3 aspectos principales:

a) Una descripción de la meta o el objetivo de estudio.
b) Una identificación de las alternativas de decisión del sistema.
c) Un reconocimiento de las limitaciones, restricciones y requisitos del sistema.

<u>2.- Construcción del modelo</u>: La segunda fase corresponde a la construcción del mo-

delo dependiendo de la definición del problema. Tal modelo deberá especificar expresiones cuantitativas para el objetivo y las restricciones del problema en función de sus variables de decisión.

3.- Solución del modelo: En modelos matemáticos esto se logra usando técnicas de optimización bien definidas y se dice que el modelo proporciona una solución óptima.

4.- Validación del modelo: Un modelo es válido sí, independientemente de sus inexactitudes al representar el sistema puede dar una predicción confiable del funcionamiento del sistema. Un método común para probar la validez de un modelo es comparar su funcionamiento con algunos datos pasados disponibles del sistema actual.

5.- Implantación de los resultados: Trata sobre la implantación de los resultados probados del modelo. La tarea de aplicar estos resultados recae principalmente en los investigadores de operaciones. Esto básicamente implicaría la traducción de éstos resultados en instrucciones de operación detallada emitidas en una forma comprensible a los individuos que administran y operan el sistema después.

El método gráfico y la aplicación del método Montante para la toma de decisiones - *Maximización de utilidades*

Supongamos el siguiente ejercicio, el cual se definirá el modelo matemático, la solución gráfica y la aplicación del método Montante para encontrar la solución óptima para maximizar las utilidades.

La Compañía CICSA tiene una pequeña planta ubicada en cierta ciudad importante del país. Su producción se limita a dos productos industriales. El alfa (A) y la beta (B). El departamento de Contabilidad ha calculado que las contribuciones unitarias (precio de venta por unidad menos costos variables por unidad) para cada producto, fueron de $10 para el producto alfa y $12 para el producto beta. Cada producto pasa por tres departamentos del área de producción, la cual está formada por 3 líneas de producción. Los requerimientos de tiempo para cada producto y el tiempo total disponible en cada departamento, son los siguientes:

	HORAS REQUERIDAS		**HORAS DISPONIBLES**
LINEA	***Producto alfa (x)***	***Producto beta (y)***	***Este mes:***
1	2	3	1500
2	3	2	1500
3	0	1	400
UTILIDAD	**$ 10**	**$ 12**	

Por lo que se desea encontrar la combinación óptima de producción para maximizar la utilidad.

Expresando estos requisitos en términos matemáticos, CICSA desea maximizar la contribución total de ambos productos, defiendo como variables de decisión:

x = el número de unidades para el producto alfa

y = el número de unidades para el producto beta

Con lo cual podemos definir la función objetivo.
Función objetivo (contribución total)

Maximizar $\mathbf{Z = \$10x + \$12y}$

Las restricciones (capacidades relativas a la producción).

Sujeto a:

$$\begin{aligned} \mathbf{2x + 3y} &\leq \mathbf{1500} \\ \mathbf{3x + 2y} &\leq \mathbf{1500} \\ \mathbf{y} &\leq \mathbf{400} \end{aligned}$$

Y finalmente la condición de no negatividad.

Donde:

$$\mathbf{x\, ,\, y \geq 0}$$

Aplicación del método gráfico
Para la aplicación del método gráfico, solo se van a graficar las dos restricciones, lo que significan que la solución deberá encontrarse en el primer cuadrante de la gráfica (x y y) en donde los valores a analizar siempre serán positivos o ceros.

<u>**Solución gráfica:**</u>
Para la primera restricción ($\mathbf{2x + 3y \leq 1500}$) sus puntos a graficar $\mathbf{P_1(0,500)}$ y $\mathbf{P_2(750,0)}$ quedaría de la siguiente manera usando la herramienta GeoGebra[6].

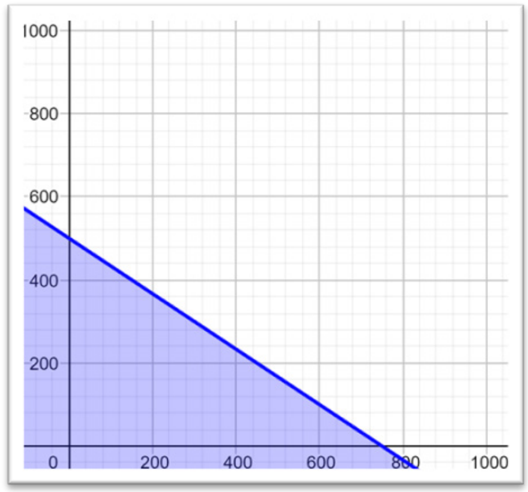

Fig. 1: Representación gráfica de la herramienta GeoGebra de la ecuación lineal $\mathbf{2x + 3y \leq 1500}$

Mientras que la segunda restricción ($\mathbf{3x + 2y \leq 1500}$) sus puntos a graficar $\mathbf{P_3(0,750)}$ $\mathbf{y\ P_4(500,0)}$, y su grafica sería:

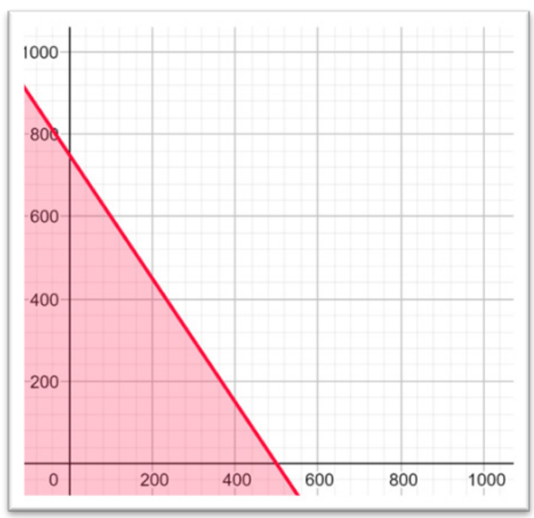

Fig. 2: Representación gráfica de la herramienta GeoGebra de la ecuación lineal $\mathbf{3x + 2y \leq 1500}$

[6] GeoGebra software matemático dinámico para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficos, estadísticas y cálculo en un solo motor. (https://www.geogebra.org/about).

Para la tercera restricción **($y \le 400$)** su punto a graficar **P_5(0,400)**, y su grafica sería:

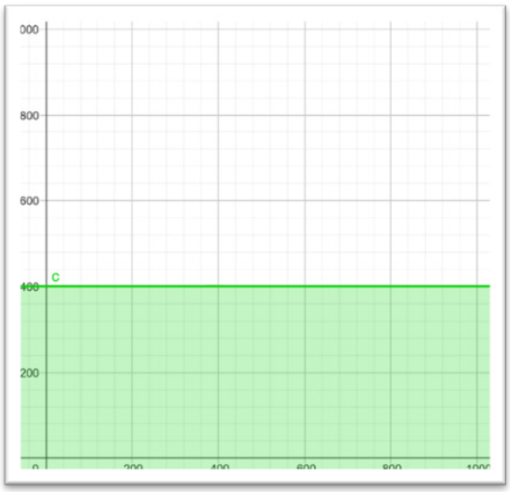

*Fig. 3: Representación gráfica de la herramienta GeoGebra de la ecuación lineal $y \le$ **400***

Ya graficadas las tres ecuaciones lineales (restricciones), podemos observar que dentro de la región factible existen dos cruces (intercepciones), la cuales denominaremos como **P_a** y **P_b**, de las cuales al punto **P_a** le aplicaremos el método de sustitución y al **P_b** el método de Montante para encontrar los valores de dichas intercepciones.

Fig. 4: Representación gráfica de la herramienta GeoGebra con las tres ecuaciones lineales

Aplicando el método de Sustitución para el punto **P_a**:

En donde las ecuaciones (restricciones) que se cruzan en este punto a, son las ecuaciones:

$$\mathbf{2x + 3y \le 1500}$$
$$\mathbf{y \le 400}$$

Al sustituir el valor de la variable y de la segunda ecuación en la primera ecuación, se obtienen los siguientes valores **P_a(150,400)**.

Los cuales al ser sustituidos en la función objetivo **$Z = \$10x + \$12y$**, se tendrá una utilidad de $6300.00.

Para la solución del punto **P_b**:
Las ecuaciones lineales (restricciones) que se cruzan en este punto a, son:

$$\mathbf{2x + 3y \le 1500}$$
$$\mathbf{3x + 2y \le 1500}$$

En las cuales aplicaremos el método de Montante, el cual contempla el siguiente procedimiento:

Teniendo como Sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{2x + 3y = 1500}$$
$$\mathbf{3x + 2y = 1500}$$

Pasaremos los coeficientes para crea la Matriz Aumentada del Sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1500 \\ 3 & 2 & 1500 \end{array}\right)$$

Empezamos en la primera columna, en donde vamos a convertir el 2 en la unidad (1) para que sea nuestro primer pivote y el 3 de esa columna en cero (0) sin ninguna operación, pero procurando pasar el resto de los valores de la primera fila igual, es decir el 3 y el 1500 pasan igual. Quedando de la siguiente manera nuestro ejercicio:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1500} \\ \mathbf{0} & 2 & 1500 \end{array}\right)$$

Ahora para encontrar los valores que van a sustituir los de la segunda fila (2 y 1500), vamos a aplicar determinantes como Cramer de la siguiente manera.

De los datos originales, vamos a seleccionar la primera y segunda columna, en donde aplicaremos la forma de obtener una determinante (multiplicaciones cruzadas), de la siguiente manera solo con los valores seleccionados.

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1500 \\ 3 & 2 & 1500 \end{array}\right)$ → $(2 \times 2) - (3 \times 3) =$ **-5**, el cual sustituirá el valor de **2** en la matriz.

Quedando en la nueva matriz de la siguiente manera.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1500 \\ 0 & \mathbf{-5} & 1500 \end{array}\right)$$

De la misma manera, pero ahora extendiendo la selección de valores, procedemos a obtener el otro valor que sustituirá el de 1500 del segundo reglón y tercera columna, el cual solo usaremos los valores de la primera y tercera columna para obtener la nueva determinante de la siguiente manera:

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1500 \\ 3 & 2 & 1500 \end{array}\right)$ → $(2 \times 1500) - (3 \times 1500) =$ **-1500**, y este valor sustituirá el valor de **1500** en la matriz.

Y nos quedaría en esta primera iteración la siguiente matriz aumentada, con la primera columna resuelta:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1500 \\ 0 & -5 & \mathbf{-1500} \end{array}\right)$$

Para resolver la segunda columna, vamos a repetir el paso en donde el valor de la segunda columna que debe ser pivote en este caso el -2 sea la unidad (1) y el valor de 3 de esa columna será cero (0) y repite el -1500. Quedando de la siguiente manera:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1500 \\ 0 & -5 & -1500 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1500 \\ 0 & 1 & \mathbf{-1500} \end{array}\right)$$

Ahora buscaremos el nuevo valor de **1500** del primer reglón y de la tercera columna, el cual lo vamos a obtener de la siguiente manera:

De los valores de la matriz, vamos a seleccionar solo los valores de la segunda y tercera columna, para mediante una determinante, pero ahora empezando las operaciones de Cramer con el valor que se hizo pivote **(-2)**.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1500 \\ 0 & -5 & -1500 \end{array}\right)$ → $(-5 \times 1500) - (3 \times -1500) =$ **-3000**

Dicho valor de -3000, en esta segunda iteración se deberá dividir entre el primer número que convertimos pivote, el cual fue el valor de 2, quedando como valor:
-3000 / 2 = -1500.

La cual quedaría la Matriz Identidad de la siguiente manera con valores en la tercera columna de **-1500** y **-1500**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \mathbf{-1500} \\ 0 & 1 & \mathbf{-1500} \end{array}\right)$$

Finalmente, para encontrar los valores reales de ***x*** y ***y***, estos valores obtenidos en la tercera columna de **-1500** y de **-1500**, se deberán ser dividir entre el último valor que convertimos en Pivote, es decir el **-5**.

Quedando los resultados finales de la siguiente manera:

$$\text{Para } x = \frac{-1500}{-5} = \boxed{300}$$

y

$$\text{para } y = \frac{-1500}{-5} = \boxed{300}$$

Para obtener los valores del $\mathbf{P_b(300,300)}$, los cuales al ser sustituidos en la función objetivo **Z = $10*x* + $12*y***, se tendría una utilidad de **$6600.⁰⁰**.

Discusión y análisis de resultados

Por lo que la combinación óptima de producción para maximizar la utilidad, sería el punto de $\mathbf{P_b(300,300)}$, el cual al compararlo con el $\mathbf{P_a(150,400)}$, se tendría mayor producción y mayor ganancia con la producción de **300 unidades** de ambos productos (*alfa* ***y beta***), con la cual se tendrá una utilidad máxima de **$6600.⁰⁰**, y se aprovecharía al máximo las horas disponibles de cada línea de producción, las cuales se puede comprobar sustituyendo en cada restricción valores de x y y del punto $\mathbf{P_b(300,300)}$, del cual obtenemos las siguientes comprobaciones:

Para la restricción que representa la línea de producción 1.

$$\boxed{2x + 3y \le 1500} \rightarrow 2(300) + 3(300) \le 1500$$
$$600 + 900 \le 1500$$
$$1500 \le 1500$$
$$\boxed{0 \le 0}$$

(Diferencia 0 horas)

Por lo que No sobrarían horas de la línea 1.

Para la restricción que representa la línea de producción 2.

$$\boxed{3x + 2y \le 1500} \rightarrow 3(300) + 2(300) \le 1500$$
$$900 + 600 \le 1500$$
$$1500 \le 1500$$
$$\boxed{0 \le 0}$$

(Diferencia 0 horas)

Por lo que No sobrarían horas de la línea 2.

Y para la restricción que representa la línea de producción 3.

$$\boxed{y \le 400} \rightarrow (300) \le 400$$
$$300 \le 400$$
$$\boxed{0 \le 100}$$

(Diferencia de 100 horas)

Sobrarían 100 horas en la línea 3.

Conclusión

Se puede demuestra que la consideración en la enseñanza y la aplicación del método Montante en problemas para la solución de un sistema de ecuaciones lineales en el ámbito académico, que representan una intercepción de dos restricciones en la gráfica del método gráfico, sería una alternativa para encontrar de manera más rápida, para la comparación de puntos a analizar en región factible de la gráfica a analizar, y por ende de gran utilidad para el uso de los diversos métodos enseñados durante la formación educativa de pregrado. La idea principal u objetivo de este documento, es dar a conocer que existen dentro de nuestro académicos e investigadores, herramientas alternativas más simplificadas para afrontar la correcta toma de decisiones en la optimización de los diversos recursos de las empresas.

Bibliografía

Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., Camm, J. D., & Martin, K. (2011). *Métodos cuantitativos para los negocios* (Undécima ed.). México: CENGAGE Learning.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2010). *Investigación de Operaciones* (Novena ed.). México: McGraw-Hill.

Render, B., Stair Jr., R. M., & Hanna, M. E. (2012). *Metodos Cuantitativos para los Negocios* (Undécima ed.). México: PEARSON.

Taha, H. A. (2012). *Investigación de Operaciones* (Novena ed.). México: PEARSON.

Thierauf, R. (1984). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. México: LIMUSA.