La condición de deslizamiento de Navier: Una idea antigua que resurge

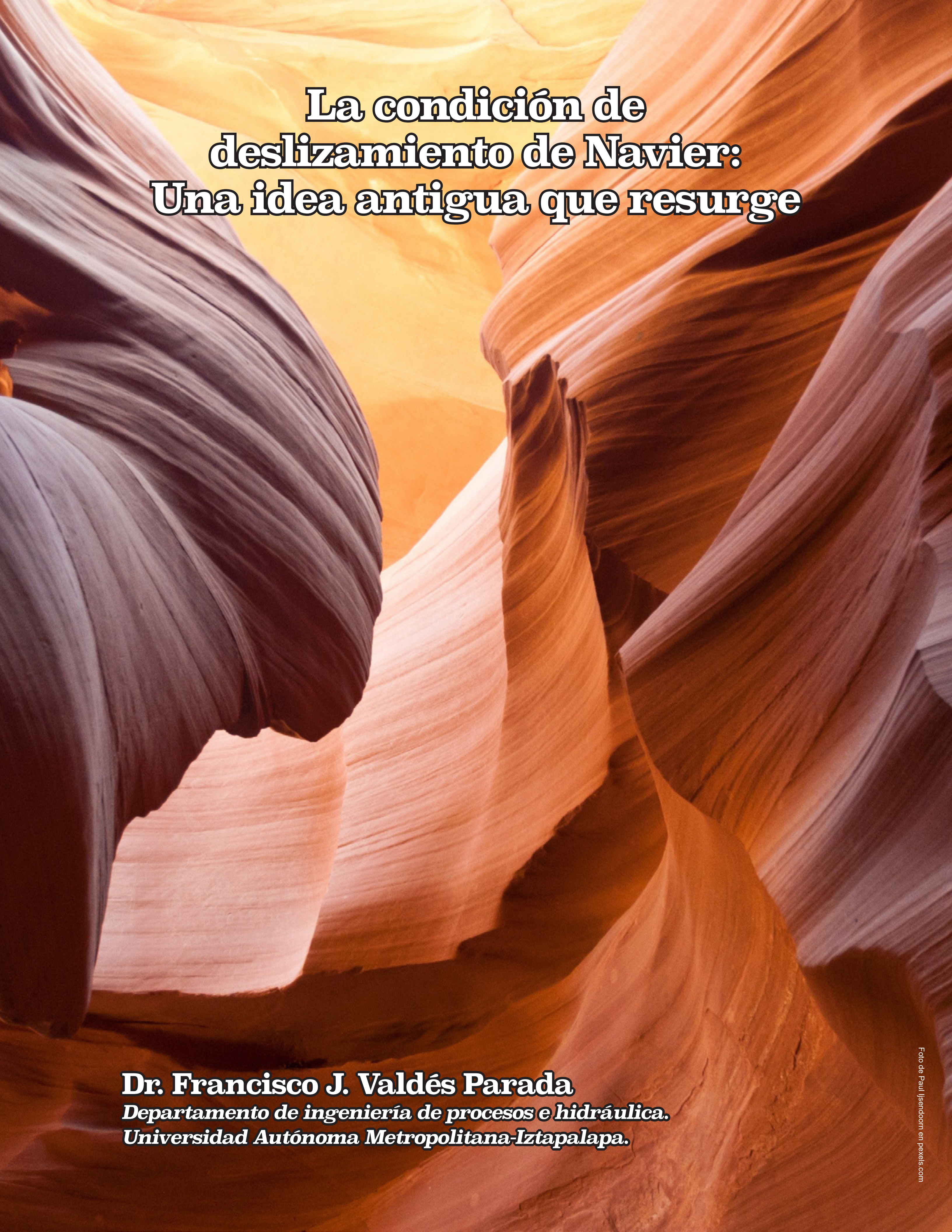

Foto de Paul Ijsendoorn en pexels.com

Dr. Francisco J. Valdés Parada

Departamento de ingeniería de procesos e hidráulica.

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.

Resumen
El flujo de fluidos se fundamenta en las ecuaciones de transporte de masa y de cantidad de movimiento, las cuales son ampliamente aceptadas en la comunidad científica. Sin embargo, el éxito en la aplicación de estas ecuaciones se ve comprometido si no se utilizan las condiciones de frontera adecuadas. En este trabajo se discute acerca de la condición de deslizamiento de Navier, la cual ha sido ignorada durante más de un siglo por la comunidad científica y en su lugar se ha usado una condición de no deslizamiento. Solo recientemente la condición de deslizamiento ha recobrado relevancia debido al tipo de aplicaciones actuales, donde el uso de la condición de no deslizamiento ha dejado de ser pertinente, por ejemplo, en aplicaciones que involucran medios porosos.

Palabras clave: Condición de deslizamiento, condiciones de frontera, superficies rugosas, flujo en medios porosos.

Abstract
Fluid flow is based on mass transport and momentum equations, which are widely accepted within the scientific community. However, the success in applying these equations is compromised if proper boundary conditions are not used. This paper discusses the Navier slip condition, which has been ignored for more than a century by the scientific community and a no-slip condition has been used instead. Only recently has the slip condition regained relevance due to the type of current applications, where the use of the no-slip condition is no longer justified, for example, in porous media applications.

Keywords: Slip conditions, boundary conditions, rough surfaces, flow in porous media.

1. Introducción

La historia de la mecánica de fluidos puede remontarse hasta los antiguos griegos quienes buscaron entender las fuerzas de flotación y usar la fuerza de los fluidos para beneficio de la sociedad. Sin embargo, los fundamentos físicos y matemáticos para explicar el flujo de fluidos se establecieron hasta los siglos XVII y XVIII con las notables aportaciones de Newton, Euler, Bernoulli, entre otros. Fue en el siglo XIX cuando se desarrollaron las ecuaciones fundamentales que describen el movimiento de fluidos, lo cual no fue sencillo e implicó un gran debate entre las comunidades de matemáticos, físicos e ingenieros de la época. Las discusiones culminaron en la formulación de la ecuación de Navier-Stokes. Esta ecuación solo pudo ser resuelta bajo condiciones de flujo reptante (es decir, sin inercia), las cuales no eran las que tenían el mayor interés práctico. Fue en el siglo XX cuando pudo llevarse a cabo la solución aproximada de esta ecuación usando métodos numéricos (Darrigol, 2005). De hecho, actualmente se cuenta con software computacional con el que es posible resolver estas ecuaciones en un tiempo considerablemente menor al que se requería, por ejemplo, hace 70 años. De hecho, la solución analítica de la ecuación de Navier-Stokes sigue siendo un reto hasta el momento y constituye uno de los problemas del milenio.

Es importante mencionar que la solución de una ecuación diferencial requiere de suficientes condiciones de frontera e iniciales, que deben considerarse durante la solución particular de la misma. Las condiciones de frontera e iniciales especifican los valores de las variables dependientes (y/o sus derivadas) en determinadas posiciones (condiciones de frontera) del sistema o bien el estado del sistema al inicio del proceso (condiciones iniciales). De aquí se deduce que los resultados que se obtienen de las ecuaciones de Navier-Stokes no sólo dependen de las suposiciones implícitas en dichas ecuaciones, sino también de las condiciones de frontera utilizadas. En otras palabras, pueden tenerse las ecuaciones diferenciales correctas, pero si las condiciones de frontera no son adecuadas para el sistema que se esté estudiando, entonces el resultado final no será el correcto. El objetivo de este trabajo es discutir acerca de una condición de frontera que fue formulada en el siglo XIX por Navier y fue ignorada en la mayor parte del siglo XX y que en este siglo comienza a recobrar importancia en la comunidad científica. Para ello, el trabajo se organiza de la siguiente forma: en la sección 2 se presenta una reseña sobre la condición de deslizamiento, desde sus inicios hasta la actualidad. Más adelante, se discuten sus aplicaciones en el flujo en medios porosos en la sección 3, seguidos de algunos comentarios finales. El texto está escrito en una forma no especializada para facilitar la comunicación de ideas. Sin embargo, se incluye un apéndice donde se presenta el formalismo matemático de la condición de deslizamiento.

2. Breve historia de la condición de deslizamiento

A principios del siglo XIX Navier (1822) tenía un dilema: había evidencia experimental de que el agua no fluía igual en la descarga de un tubo de vidrio que en otro de cobre a pesar de usar, para ambos casos, la misma fuerza impulsora (un gradiente de presión), mismo diámetro, longitud, etc. Navier había tenido éxito en el pasado al imponer que en la frontera entre un sólido inmóvil y un fluido viscoso la velocidad del fluido es la misma que la del sólido. A esta condición se le conoce como condición de no deslizamiento (ver figura 1a). Sin embargo, si la fuerza impulsora era la misma, las dimensiones del sistema eran las mismas, pero las velocidades de descarga eran distintas Navier ya no podía salvar la situación manteniendo la teoría exactamente igual. Fue entonces que propuso una condición de deslizamiento, en la cual la componente del vector de velocidad del fluido que es tangente a la superficie del sólido no es igual a la velocidad del sólido (ver figura 1b). La forma matemática de la condición de deslizamiento propuesta originalmente por Navier en 1822 se presenta en el apéndice. Gracias a esta formulación, Navier fue capaz de reproducir satisfactoriamente los resultados experimentales disponibles. Esta expresión fue deducida más adelante por Maxwell (1879) mediante su teoría de colisiones entre partículas. Más aún, la condición de deslizamiento de Navier es lo suficientemente versátil para reducirse a la condición de no deslizamiento, si así fuera el caso. Para entender esto último, es conveniente examinar los tres casos mostrados en la figura 1. En el primer caso no hay deslizamiento y la velocidad del fluido se reduce a cero en la frontera. En los otros dos casos se presenta un deslizamiento parcial y uno perfecto. En el deslizamiento parcial la velocidad del fluido no disminuye hasta cero en la interfase, pero el fluido es frenado por la presencia del sólido. En este caso, se define una distancia ficticia de penetración, λ, en la fase sólida en la cual se alcanzaría la condición de no deslizamiento. De esta forma, cuando $\lambda = 0$ se recupera la condición de no deslizamiento (ver el apéndice para la forma matemática de la condición de deslizamiento). Por último, en el deslizamiento perfecto, el fluido no es alterado por el sólido y mantiene su velocidad. En este caso $\lambda \to \infty$ ya que en ningún lugar disminuye la velocidad.

A pesar del éxito de Navier y Maxwell, la condición de deslizamiento no ganó popu-

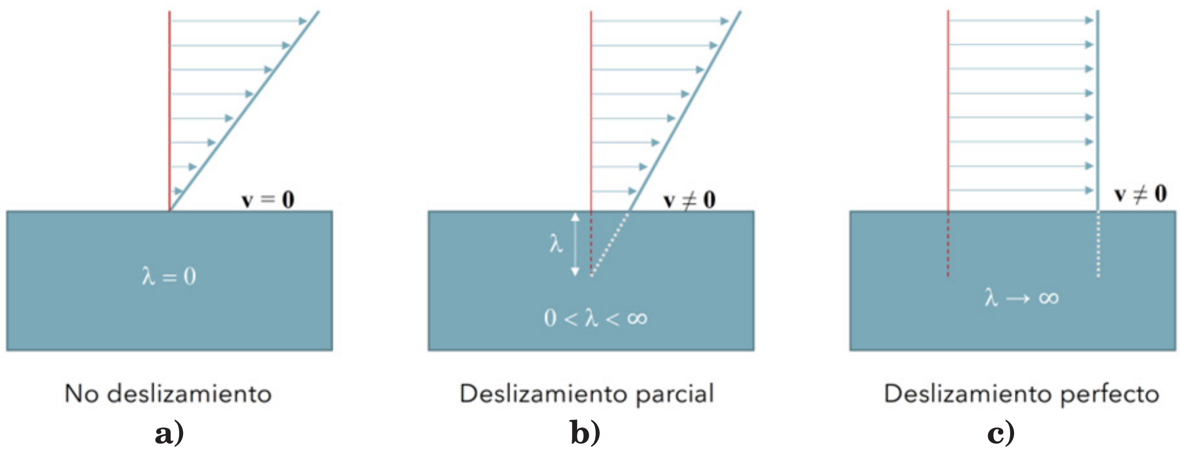

Figura 1: Esquema de tres tipos de deslizamiento entre un fluido y un sólido inmóvil: a) en la condición de no deslizamiento la velocidad del fluido es cero, b) en el deslizamiento parcial la velocidad del fluido se reduce, aunque no hasta cero en la frontera y c) en el deslizamiento perfecto la velocidad no es afectada por la presencia del sólido. Estos tres tipos de interacción entre el fluido y el sólido pueden describirse en términos de la distancia ficticia de penetración (λ) del fluido en el sólido.

laridad por más de un siglo en la comunidad académica y científica. Al punto que actualmente son pocos los libros que mencionen la condición de deslizamiento de Navier y que dejen claro que la condición de no deslizamiento es una suposición que puede de hecho fallar en algunos casos. Esto se debe a que en muchas de las aplicaciones en física e ingeniería del siglo XX se obtenía una buena concordancia entre teoría y experimentos al imponer la condición de no deslizamiento debido al nivel de escala y régimen de flujo que se consideró. Sin embargo, en este siglo se ha notado que la condición de no deslizamiento no es adecuada para describir datos experimentales en aplicaciones que incluyen el transporte en medios porosos, microfluídica, sistemas biológicos, disposición final de residuos radiactivos, entre otras. Lo que tienen en común estas aplicaciones es que las fuerzas intermoleculares en el fluido son balanceadas por las fuerzas viscosas (o de corte) en la superficie del sólido. Lo anterior se traduce en que el flujo del fluido es más rápido de lo que se obtendría si se usa la condición de no deslizamiento.

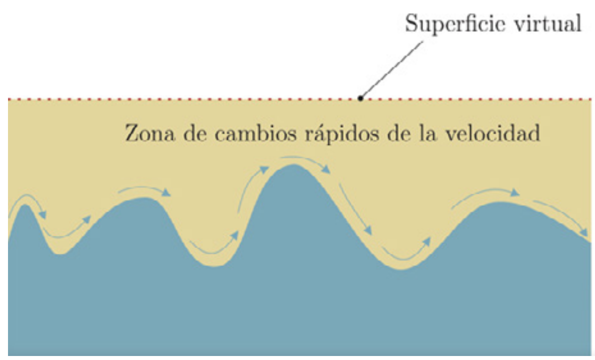

Figura 2: Esquema del flujo sobre una superficie rugosa identificando la zona de cambios rápidos de la velocidad y la superficie virtual.

Aunado a lo anterior, existe otra situación importante en la que se puede encontrar una formulación matemática equivalente a la condición de deslizamiento de Navier. Esta situación corresponde al flujo de fluidos sobre superficies rugosas. En este tipo de aplicaciones, el describir detalladamente la rugosidad de las superficies puede ser computacionalmente prohibitivo, por lo que se ha propuesto utilizar *condiciones de frontera efectivas* (ver, por ejemplo, Lacis y col., 2020). Esta formulación consiste en definir una superficie virtual a una cierta distancia de la frontera real en donde se deduce una condición de deslizamiento que captura la información esencial de lo que ocurre cerca de la frontera rugosa. Como se muestra en la figura 2, mediante esta superficie virtual se puede definir una zona de cambios rápidos de la velocidad, la cual se distingue de la zona de cambios más lentos ubicada por encima de la superficie virtual. Aunque evidentemente, el uso de condiciones de frontera efectivas es una aproximación de la realidad, se han obtenido resultados prometedores que sugieren su uso incluso bajo condiciones de flujo turbulento (Bottaro, 2019). Este es un tema de interés actual ya que el uso de superficies rugosas disminuye el arrastre viscoso en las superficies sólidas. Esto quiere decir, por ejemplo que, si se recubren las alas de un avión o el toldo de un auto con un material rugoso, podrá reducirse el consumo de combustible respecto a situaciones donde la superficie es lisa. Por último, es importante mencionar que el deslizamiento de un fluido puede también deberse a un gradiente de concentración como lo propusieron Kramers y Kistemaker (1943). La forma matemática de esta condición de deslizamiento se incluye en el apéndice, mientras que su significado físico es el siguiente: cuando los cambios en la concentración de una especie química en un fluido son tales que se genere un considerable gradiente de concentración en la superficie con el sólido, dicho gradiente puede promover el deslizamiento del fluido sobre la superficie del sólido.

3. Flujo de gases en medios porosos

De entre las múltiples aplicaciones del flujo deslizante, se escoge el flujo de gases en medios porosos por su amplia gama de aplicaciones en sistemas de interés en ciencias básicas e ingeniería. Un medio poroso puede entenderse como un sistema constituido por una fase sólida (la cual puede ser rígida o deformable) y una o más fases fluidas. Por lo regular este tipo de sistemas involucran una separación de longitudes características entre la escala de poro (por ejemplo, el mayor diámetro de poro) y la escala del medio poroso (ver figura 3). En otras palabras, la longitud característica del sistema es varios órdenes de magnitud mayor que el diámetro de poro. Esta característica permite desarrollar modelos matemáticos que aplican en un nivel de escala intermedio entre la escala de poro y la escala del sistema completo a través de un proceso de escalamiento. Dicho procedimiento implica definir una región de promediado como la mostrada en la figura 3 para filtrar sistemáticamente la información no redundante proveniente del nivel de escala de poro. Por ello, estos modelos también se califican como de medio efectivo pues permiten concebir al sistema como si fuera un medio continuo (es decir como si fuera una pseudo-fase).

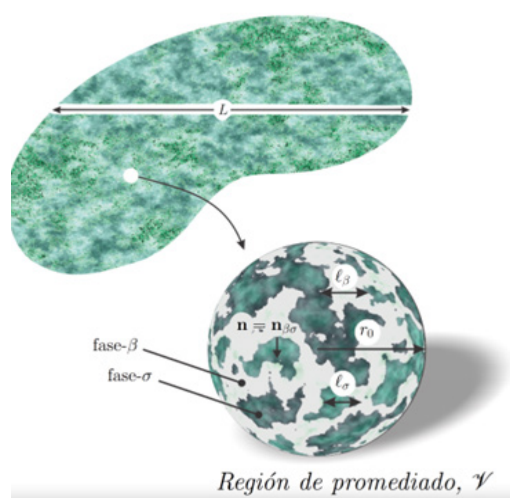

Figura 3. Esquema de un medio poroso, incluyendo longitudes características y a la región de promediado.

Para el caso del flujo de gases en medios porosos es conveniente definir al número de Knudsen (Kn) como la razón entre la trayectoria libre media entre moléculas y la longitud característica en la escala de poro (Knudsen, 1950). Este número adimensional es de suma importancia ya que actualmente hay un cierto consenso en la literatura respecto a las implicaciones físicas de sus valores. En este sentido, para $Kn<10^{-3}$, pueden usarse las ecuaciones de Navier-Stokes para describir el flujo en los poros junto con la condición de no deslizamiento en la interfase sólido-fluido al interior del medio poroso. Lo anterior se debe a que en estas condiciones el arrastre viscoso en la interfase es tal que frena por completo el movimiento del fluido. Más aún, para $10^{-3}<Kn<10^{-1}$ aún puede utilizarse la ecuación de Navier-Stokes, pero debe usarse la condición de deslizamiento de Navier. El régimen comprendido entre $10^{-1}<Kn<10$ es de transición y ya no pueden usarse las ecuaciones de Navier Stokes pues se viola la hipótesis del continuo en la que se fundamentan. En su lugar, pueden usarse aproximaciones de la ecuación de Boltzmann como son el modelo de Bhatnagar–Gross–Krook o las ecuaciones de Burnett. Por último, para $Kn>10$ deben usarse las ecuaciones de la teoría cinética de gases, lo cual complicaría mucho el desarrollo de modelos de medio efectivo por la cantidad de variables a considerar.

El primer modelo para el estudio del flujo en medios porosos lo reportó Darcy (1856) para flujo reptante, newtoniano y en estado estacionario en su estudio de las fuentes públicas de la ciudad de Dijon. Darcy propuso que la velocidad promedio en el medio poroso es directamente proporcional al gradiente de presión aplicado mediante un coeficiente de permeabilidad, el cual se divide entre la viscosidad del fluido. De esta forma, el coeficiente de permeabilidad solo depende de la geometría de los poros en el sistema, pero no de las propiedades del fluido. Sin embargo, para el transporte de gases bajo condiciones de flujo deslizante, Klinkenberg (1941) notó que la permeabilidad debía depender de las condiciones de flujo y no solo de la geometría. Las propuestas de Darcy y Klinkenberg se hicieron de manera empírica y fue hasta la segunda mitad del siglo XX cuando se desarrollaron técnicas de escalamiento que permitieron deducir dichos modelos y darles el sustento físico que permite comprender las condiciones bajo las cuales son aplicables. Actualmente, se ha estudiado cómo el deslizamiento mejora el flujo a través de medios porosos en condiciones estacionarias, transitorias e incluso en las fronteras del medio poroso. Esto se traduce en la posibilidad de mejorar la estimación del flujo de fluidos y el transporte (ya sea de calor, masa o corriente eléctrica) en medios porosos. Entre algunas de las aplicaciones que tiene esta teoría están: el crecimiento de cristales (lo cual puede por ejemplo afectar los sistemas de propulsión de cohetes espaciales y misiles de largo alcance), procesos químicos catalíticos (como la pirólisis), el secuestro geológico de dióxido de carbono, la separación de gases de distintas densidades en fracturas y medios porosos, entre muchos otros.

4. Comentarios finales

En este trabajo se discutió acerca de la condición de deslizamiento de Navier, la cual, tras haber sido ignorada por mucho tiempo en la literatura, ha comenzado a recobrar su importancia en la comunidad científica. La importancia de esta condición de frontera es que permite encontrar las condiciones bajo las cuales es posible mejorar la representación del flujo tanto en superficies lisas como rugosas, así como en medios porosos, entre muchas otras aplicaciones. En cuanto más se estudie este tema, de forma tanto teórica como experimental, se tendrán posibilidades de comprender y aprovechar el flujo de fluidos en una amplia variedad de sistemas.

Agradecimiento
El autor agradece sinceramente a Jessica Sánchez Vargas por sus comentarios y discusiones en la preparación del manuscrito.

Referencias
Bottaro, A. (2019). Flow over natural or engineered surfaces: an adjoint homogenization perspective. *Journal of Fluid Mechanics* 877, 1–91. Publisher: Cambridge University Press (CUP).

Darcy, H. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : exposition et application des principes `a suivre et des formules `a employer dans les questions de distribution d'eau.* V. Dalmont (Paris).

Darrigol, O. (2005). *Worlds of Flow: A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl.* Oxford University Press.

Klinkenberg, L.J. (1941). The permeability of porous media to liquids and gases. *American Petroleum Institute* 2, 200–213. Publisher: Oil Gas Scientific Research Project Institute.

Knudsen, M. (1950). *Kinetic Theory of Gases*. Third edition. Methuen's monographs on physical subjects.

Kramers, H.A., Kistemaker, J. (1943). On the slip of a diffusing gas mixture along a wall. *Physica* 10, 699–713. Publisher: Elsevier BV.

Lacis U., Sudhakar, Y., Pasche, S., Bagheri, S. (2020). Transfer of mass and momentum at rough and porous surfaces. *Journal of Fluid Mechanics* 884. Publisher: Cambridge University Press (CUP).

Maxwell, J.C. (1879). On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 170, 231-256.

Navier, M. (1822). *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides.* volumen 6. l'Académie Royale des Sciences.

Apéndice A.
Forma matemática
de la condición de deslizamiento

El propósito de este apéndice es presentar las expresiones de la condición de deslizamiento en forma matemática. Como se expuso en la sección 2 hay dos formas principales de tener condiciones de deslizamiento: el deslizamiento molecular sobre superficies reales (considerado por Navier y Maxwell) y el deslizamiento efectivo sobre superficies virtuales. En el primer caso, la condición de deslizamiento se expresa como:

$$\mathbf{v} = -\lambda\,(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{nn})\cdot[\,\mathbf{n}\cdot(\nabla\mathbf{v}+\nabla\mathbf{v}^{T})\,],\quad \text{en la interfase sólido-fluido} \qquad (1)$$

En donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del fluido, $\mathbf{n}$ es el vector unitario dirigido de la fase fluida hacia el sólido, $\mathbf{I}$ es el tensor de identidad. Por último, λ es la longitud de deslizamiento y representa la distancia ficticia a la cual tendría que extenderse el perfil de velocidad dentro del sólido para llegar a una condición de no deslizamiento (ver figura 1b). Para el caso ideal en el que el deslizamiento fuera perfecto, $\lambda \to \infty$ como se ilustra en la figura 1c). Note que, si se lleva a cabo el producto punto en ambos lados de la ecuación anterior con $\mathbf{n}$, el resultado es $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = 0$, lo cual indica que no hay transferencia de masa entre el fluido y el sólido y que el sólido está fijo.

Para comprender mejor el significado físico de la ecuación (1), es conveniente definir al *tensor de esfuerzos totales* para un fluido newtoniano e incompresible como:

$$\mathrm{T} = -\mathbf{I}p + \mu\,(\nabla\,\mathbf{v} + \nabla\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}}) \qquad (2)$$

Siendo p la presión del fluido y μ su viscosidad. La proyección normal de este tensor se conoce como el *vector de esfuerzos totales*, y se expresa como sigue:

$$\mathrm{t} = \mathrm{n} \cdot \mathrm{T} \qquad (3)$$

De esta forma, la ecuación (1) puede escribirse como sigue:

$$\mathrm{v} = -\frac{\lambda}{\mu}(\mathbf{I} - \mathbf{nn}) \cdot \mathrm{t} = -\frac{\lambda}{\mu}\,[\,\mathbf{t} - (\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}\,)\,\mathbf{n}\,],$$

en la interfase sólido-fluido (4)

Note que, en el corchete de la ecuación anterior, se le substrajo al vector **t**, su componente normal. En otras palabras, la condición de deslizamiento de Navier indica que la velocidad en la superficie entre un fluido y un sólido es proporcional a la componente tangencial del vector de esfuerzos multiplicada por la razón λ/μ.

Por su parte, para el caso de la condición de frontera efectiva sobre superficies virtuales, la expresión resultante es similar a la mostrada en la ecuación (1), con la diferencia de que la longitud de deslizamiento ya no se representa, en general, como un escalar, sino como un tensor de segundo orden, **L**. Esto es,

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{L}}{\mu} \cdot (\,\mathbf{I} - \mathbf{nn}\,) \cdot \mathbf{t}\,,$$

en la superficie virtual (5)

La razón para usar un tensor en lugar de un escalar es para poder cuantificar la influencia de la topología de la superficie rugosa en todas las direcciones.

Para concluir este apéndice, es importante mencionar que existe otra condición de deslizamiento que no se debe al esfuerzo viscoso del fluido. Este deslizamiento puede deberse a un gradiente de concentración de una especie química diluida en el fluido y se expresa como sigue

$$\mathbf{v} = (\,\mathbf{I} - \mathbf{nn}\,) \cdot \frac{\nabla c}{(\,c + \alpha\,)} \qquad (6)$$

En donde, c es la concentración de la especie química que se transporte en la fase fluida y α es una constante que depende de la densidad del fluido y los pesos moleculares del soluto y del solvente. Esta condición de deslizamiento fue propuesta por Kramers y Kistemaker (1943) y tiene importantes aplicaciones ambientales, biotecnológicas, industriales, entre otras.