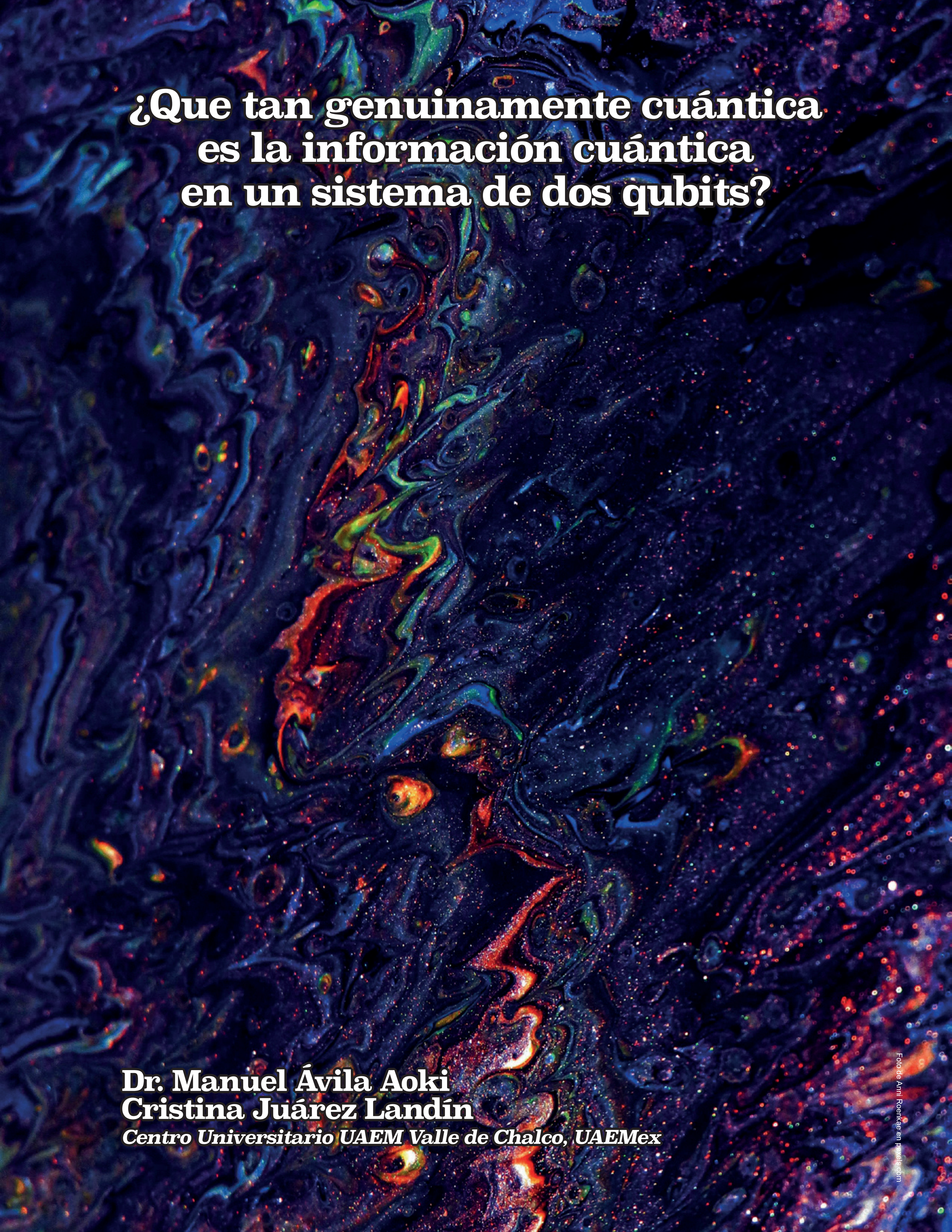

¿Que tan genuinamente cuántica es la información cuántica en un sistema de dos qubits?

Dr. Manuel Ávila Aoki
Cristina Juárez Landín
Centro Universitario UAEM Valle de Chalco, UAEMex

Foto de Anni Roenkae en pexels.com

Resumen:
Para evitar no deseados efectos de decoherencia, se considera un sistema de dos qubits expuestos a un reservorio común a muy bajas temperaturas. La información cuántica asociada al sistema de dos qubits tiene una contribución clásica y una contribución cuántica. Se deriva la respectiva expresión para las correlaciones clásicas y para las correlaciones cuánticas en función del tiempo. Se considera el caso de tiempos remotos ($t \to \infty$). En dicha situación se halla el límite genuinamente cuántico donde las correlaciones clásicas desaparecen y por tanto la Información Cuántica es genuinamente cuántica. Se demuestra que el concepto de conservación que subyace detrás de la ganancia (pérdida) de Información Cuántica será proporcional a la conservación de la energía interna del sistema a temperatura constante. En caso de ganancia (pérdida) de Información Cuántica el sistema tomará (cederá) energía interna de (hacia) los alrededores.

Palabras claves: dos-qubits; correlación clásica; discordia cuántica; información cuántica mutua; entropía; energía

Abstract:
In order to avoid unwanted effects of decoherence, it is considered a two qubits systems exposed to a common reservoir at very low temperatures. Quantum Information associated to the two qubits system has both a classical contribution and a quantum contribution . It is derived the respective expression for both classical correlations and quantum correlations as a function of time. It is considered the case of remote times ($t \to \infty$). In such a situation the genuinely quantum limit where the classical correlations vanish and then Quantum Information is genuinely quantum is found. It is shown that the concept of conservation behind generation (loss) of Quantum Information will be proportional to energy conservation of the system at constant temperature. In case of generation (loss) of Quantum Information the system will absorb (transfer) internal energy from (towards) the environment.

Keywords: two-qubits; classical correlation; quantum discord; mutual quantum information; entropy; energy

Introducción

La cantidad de Información Cuántica es un ingrediente fundamental para diversos diferentes protocolos de la Informática Cuántica tales como Teleportación Cuántica (Bennet, 1993), Codificación Densa Cuántica (Bennet, 1992), Intercambio de entrelazamiento (Zukowski, 1993) y Criptografía Cuántica (Ekert, 1991). Para un sistema de dos qubits, la Información Cuántica permite caracterizar cuando dicho sistema es separable, entrelazado, clásicamente correlacionado ó cuánticamente correlacionado (Alber, 2001), (Horodecki, 2009), (Yang, 2010), (Yang, 2013). El termino Información Cuántica es muy genérico e incluye Entrelazamiento y Discordia Cuántica (Yang, 2013).

En este contexto surge la siguiente pregunta: ¿Qué tan genuinamente cuántica es la Información Cuántica? Para responder esta pregunta en el presente trabajo se considera un sistema de dos qubits acoplado a un reservorio estructurado común a temperatura fija constante cercana al cero absoluto. Se halla que la cantidad de Información Cuántica tiene una contribución proveniente de correlaciones clásicas. Se considera el caso de tiempos remotos $t \to \infty$ y en dicho caso se deriva el límite en donde las correlaciones clásicas desaparecen y por tanto la Información Cuántica es genuinamente cuántica.

El presente trabajo se organiza como sigue: Primero se presenta el modelo. Posteriormente se halla una expresión algebraica para la cantidad información cuántica mutua. En se deriva la respectiva expresión para el caso de tiempos remotos. Se proporciona una discusión y se concluye con un sumario en las conclusiones.

Materiales y métodos

Consideremos un sistema cuántico abierto de dos qubits acoplados a un reservorio bosonico común a temperaturas cercanas al cero absoluto para evitar un ruido cuántico no deseado. El Hamiltoniano del sistema total es

$$H=H_S+H_R+H_{int}, \quad (1)$$

donde H_S es el Hamiltoniano de los dos qubits, H_R es el Hamiltoniano del reservorio y H_{int} es el Hamiltoniano de interacción Sistema-Reservorio. En las aproximaciones dipolo y onda-rotante el Hamiltoniano total puede ser desarrollado como (Maniscalco, 2008)

$$H_S=\omega_1\, \sigma_+^1\, \sigma_-^1+\omega_2\, \sigma_+^2\, \sigma_-^2, \quad (2)$$

$$H_R=\sum_k \omega_k\, b_k^+\, b_k, \quad (3)$$

$$H_{int}=(\alpha_1\, \sigma_+^{(1)}+\alpha_2\sigma_+^{(2)})\sum_k g_k b_k+c{\cdot}h, \quad (4)$$

donde b_k^+ (b_k) son los operadores de creación (aniquilación) de cuantos del reservorio, $\sigma_\pm^{(a)}$ y ω_a son el operador de inversión y la frecuencia de transición del qubit a respectivamente, ω_k es la frecuencia asociada al modo k del reservorio y $\alpha_a\, g_k$ describe la intensidad del acoplamiento entre el qubit a y el modo k del reservorio, α_a es la constante de acoplamiento adimensional real midiendo la intensidad del acoplamiento Qubit-Reservorio. En lo que sigue se denotará la constante de acoplamiento colectiva mediante $\alpha_T=(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{1/2}$ y la intensidad relativa de interacción como $r_a=\alpha_a/\alpha_T$ $(a=1,2)$.

El presente estudio se va a delimitar al caso en el cual solo una excitación en el sistema está presente además de que el reservorio está en el vacío. Asimismo se supondrá que inicialmente (t=0) el sistema de dos qubits no está entrelazado con el reservorio y que el estado inicial de todo el sistema será

$$|\Phi(0)\rangle = [A|1\rangle_1|0\rangle_2 + B|0\rangle_1|1\rangle_2] \otimes_k |0_k\rangle_R, \quad (5)$$

donde A y B son números complejos tales que $|A|^2+|B|^2=1$, $|0\rangle_a$ $(|1\rangle_a)$ es el estado base (excitado) del qubit a $(a=1,2)$ y $|0_k\rangle_R$ es el estado del reservorio con cero excitaciones en el modo k. El estado inicial $|\Phi(0)\rangle$ evolucionará en el tiempo de acuerdo a $|\Phi(t)\rangle = e^{-iHt}|\Phi(0)\rangle$ (Sakurai, 2017). Este estado puede ser factorizado como

$$|\Phi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_R + c_2(t)|0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_R + \sum_k c_k(t)|0\rangle_1|0\rangle_2|0_k\rangle_R, \quad (6)$$

donde $|0_k\rangle_R$ es el estado del reservorio con solo una excitación en el modo k y k y $|0\rangle_R = \otimes_k |0_k\rangle$. La matriz reducida de densidad de estados la cual es obtenida del operador $|\Phi(t)\rangle\langle\Phi(t)|$ será la siguiente

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |c_1(t)|^2 & c_1(t)c_2^*(t) & 0 \\ 0 & c_1^*(t)c_2(t) & |c_2(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-|c_1(t)|^2-|c_2(t)|^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Resultados

Suponiendo que la densidad espectral del reservorio está dada por

$$J(\omega) = \frac{W^2}{\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_c)^2+\gamma^2}, \quad (8)$$

donde ω_c es la frecuencia fundamental de la cavidad, la solución de la respectiva ecuación de Schroedinger estará dada por (Yang, 2013)

$$c_1(t) = [r_2^2 + r_1^2\epsilon(t)]c_1(0) - r_1r_2[1-\epsilon(t)]c_2(0), \quad (9)$$

$$c_2(t) = -r_1r_2[1-\epsilon(t)]c_1(0) + [r_1^2 + r_2^2\epsilon(t)]c_2(0), \quad (10)$$

siendo

$$\epsilon(t) = e^{-\frac{(\gamma-i\delta(t))t}{2}}\left[\cosh(\Omega t/2) + \frac{(\gamma-i\delta(t))}{\Omega}\sinh(\Omega t/2)\right], \quad (11)$$

donde $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $\Omega = \sqrt{\gamma^2 - {\Omega_R}^2 - 2i\delta\gamma}$, $\Omega_R = \sqrt{4W^2\alpha_T^2 + \gamma^2}$ la frecuencia de Rabi generalizada y $R = W\alpha_T$ la frecuencia de Rabi en el vacío.

- Información cuántica mutua

Para dos subsistemas A y B descritas por un estado cuántico bipartita $\rho_{AB} = \rho_S$ la correlación total entre ellos será la información cuántica mutua (Maziero, 2009)

$$\tau(\rho_S) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_S), \quad (12)$$

donde $S(\rho) = -Tr\ (\rho \log\_2\ \rho)$ es la entropía de Von Neumann de la matriz de densidad ρ y ρ_A (ρ_B) es el operador reducido de densidad para los subsistemas A (B). Por otra parte, la información cuántica mutua está definida también, en términos de la correlación cuántica (discordia cuántica) (Ollivier, 2001) D y la correlación clásica C (Vedral, 2003) a través de

$$\tau(\rho_S) = D(\rho_S) + C(\rho_S). \quad (13)$$

La expresión analítica para las correlaciones clásicas será la siguiente

$$C(\rho_S) = [1-|c_1(t)|^2 - |c_2(t)|^2]\log_2[1-|c_1(t)|^2 - |c_2(t)|^2] - \textstyle\sum_{a=1,2}[1 - |c_a(t)|^2]\log_2[1-|c_a(t)|^2]. \quad (14)$$

Por otra parte la correlación cuántica será

$$D(\rho_S) = |c_1(t)|^2\log_2\left(1+\frac{|c_2(t)|^2}{|c_1(t)|^2}\right) + |c_2(t)|^2\log_2\left(1+\frac{|c_1(t)|^2}{|c_2(t)|^2}\right). \quad (15)$$

- Energía interna e información cuántica

De acuerdo a la Primera Ley de la Termodinámica (Bailyn, 1994), en ausencia de fuerzas externas la energía interna total U, estará dada por

$$\Delta U = T\Delta S, \quad (16)$$

donde T es la temperatura del sistema y S es la entropía del sistema. De acuerdo a las Ecs. (12), (13) y (16) la energía interna U estará relacionada a la información cuántica τ a través de

$$\Delta U = T\Delta\tau = T(\Delta D + \Delta C). \quad (17)$$

Resultados

- Caso: Tiempos Remotos ($t \to \infty$)

En lo que sigue supondremos sin pérdida de generalidad que $c_1(t=0) = 1$ y $c_2(t=0) = 0$. Para tiempos remotos, los coeficientes de las Ecs. (9) y (10) serán $c_1(t\to\infty) = r_2^2$ y $c_2(t\to\infty) = -r_1 r_2$. Por otra parte, la Ecuación (17) nos dice que en este límite el incremento de energía interna e información cuántica estará dado por

$$U(t\to\infty) - U(t=0) = T[\tau(t\to\infty) - \tau(t=0)]. \quad (18)$$

De las Ecs. (9), (10), (11), (14), (15) y (17) se tendrá que

$$U(t \to \infty) - U(t=0) = T\left[r_2^4 \log_2\left(1+\frac{r_2^2}{r_1^2}\right) + r_1^2 r_2^2 \log_2\left(1+\frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + (1 - r_2^4 - r_1^2 r_2^2)\log_2(1 - r_2^4 - r_1^2 r_2^2) - (1 - r_2^4)\log_2(1 - r_2^4) - (1 - r_1^2 r_2^2)\log_2(1 - r_1^2 r_2^2)\right]. \tag{19}$$

Vale la pena observar que en el caso límite cuando $r_2 \ll 1$, la correlación clásica de la Ec. (14) es nula en tiempos remotos y solo sobrevive la correlación cuántica (discordia) por lo que la Información Cuántica es genuinamente cuántica. En este límite genuinamente cuántico, la Ec. (19) se reduce a

$$U(t \to \infty) - U(t=0) = T\, r_1^2 r_2^2 \log_2\left(1+\frac{r_1^2}{r_2^2}\right) \tag{20}$$

Como se puede apreciar de la Ecuación anterior, dado que $\Delta U > 0$ entonces hay una ganancia de Entropía. Lo anterior es consistente con la Segunda Ley de la Termodinámica.

Observar también que dado que $U(t \to \infty) - U(t = 0) > 0$, en tiempos remotos hay ganancia tanto de Energía Interna así como de Información Cuántica.

Discusión

En la literatura es aceptado sin reparo que la información cuántica es genuinamente cuántica. En el presente trabajo se ha demostrado que la información cuántica mutua de un sistema de dos qubits recibe contribuciones clásicas. Esto no es un elemento inesperado ya que la información cuántica mutua se define en términos de la entropía la cual surge precisamente del mundo macroscópico clásico. No es una tarea inmediata hallar el límite genuinamente cuántico de la información cuántica mutua. Este límite representa la correlación cuánticamente pura y estará relacionado a la discordia cuántica. El concepto de conservación que subyace detrás de la ganancia (pérdida) de Información Cuántica será proporcional a la conservación de la energía interna del sistema a temperatura constante. En caso de ganancia (pérdida) de Información Cuántica el sistema tomará (cederá) energía interna de (hacia) los alrededores. De acuerdo con la Segunda Ley de la Termodinámica en el remoto futuro deberá haber una ganancia de entropía con lo cual el sistema de dos qubits ganara información cuántica.

Conclusiones

Como se puede observar de la Ecuación (13), la cantidad de Información Cuántica Mutua contiene contribuciones tanto de correlaciones cuánticas así como de correlaciones clásicas del sistema de dos qubits. Así, el cambio en la Información Cuántica del sistema de qubits es proporcional al intercambio de Energía Interna del sistema a temperatura constante..

Por razones históricas comúnmente se considera a la Entropía como una cantidad estrictamente clásica macroscópica. En el presente trabajo se ha mostrado que la Entropía es una cantidad que contiene tanto elementos clásicos así como elementos cuánticos tal como lo muestra la Ecuación (13). En dicha ecuación se puede apreciar que la cantidad de Entropía del sistema de qubits es la suma de las correlaciones clásicas y las correlaciones cuánticas. Una suposición básica para el presente trabajo es que los dos qubits bajo estudio, estén expuestos a un reservorio común. Dicha hipótesis lleva a que la matriz reducida de densidad de estados de la Ecuación (7) tenga una forma simétrica. Se ha hallado una expresión para la información cuántica τ dada por la Ecuación (13). La información cuántica tiene una componente clásica y una componente estrictamente cuántica. Se hallan las expresiones para las correlaciones clásicas y las correlaciones clásicas dadas por las Ecuaciones (14) y (15) respetivamente. En el presente trabajo se considera el caso límite de tiempos remotos ($t \to \infty$). En dicha situación se ha hallado el límite genuina mente cuántico donde las correlaciones cuánticas desaparecen se alcanza cuando $r_2 \ll 1$.

Agradecimientos
Agradecemos al SNI CONACyT.

Bibliografía

Alber G., Beth T., Horodecki M., Horodecki P., Horodecki R., Rotteler M., Weinfurter H., Werner R., & Zeilinger A. (2001) *Introduction to Basic Theoretical Concepts and Experiments*, Berlin: Springer-Verlag, Chap 5.

Bailyn M. (1994) *A survey of Thermodynamics*, American Institute of Physics.

Bennet C. H. & Wiesner S. J. (1992) Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolosky-Rosen states, *Phys. Rev. Lett. 69*, 2881. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.2881

Bennet C. H., Brassard G., Crepeau C. et al. (1993) Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen chanels, *Phys. Rev. Lett. 70*, 1895. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895

Ekert A. K. (1991) Quantum cryptography based on Bell's theorem, *Phys. Rev. Lett. 67*, 661. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.661

Horodecki R., Horodecki P., Horodecki M. & Horodecki K. (2009) Quantum Entanglement, *Rev. Mod. Phys. 81*, 865. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.865

Maniscalco S., Francica F., Zaffino R. L., LoGullo N. L. & Plastina F. (2008) Protecting Entanglement via the Quantum Zeno Effect, *Phys. Rev. Lett. 100,* 090503. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.090503

Maziero J., C'eleri L. C., Serra R. M., & Vedral V. (2009) Classical and quantum correlations under decoherence, *Phys Rev. A 80*, 044102. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.044102

Ollivier H. & Zurek W. H. (2001) Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations, *Phys. Rev. Lett. 88*, 017901. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.017901

Sakurai J. J. & Napolitano J. (2017) *Modern Quantum Mechanics*, Cambridge University Press.

Vedral V. (2003) Classical Correlations and Entanglement in Quantum Measurements, *Phys. Rev. Lett. 90*, 050401. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.050401

Yang X. & Xiao J.-H (2013) Dynamics of quantum discord for a two-qubit system, *Optoelectronics Letters 9*, 1. https://doi.org/10.1007/s11801-013-2289-y

Yang X. & Zou H.-M (2010) Preparation and transfer of entanglement in atomic ensembles interacting with cavity fields, *Optoelectronics Letters 6*, 144. https://doi.org/10.1007/s11801-010-9237-x

Zukowski M., Zeilinger A., Horne M. A., Ekert A. K. (1993) "Event-ready-detectors" Bell experiment via entanglement swapping, *Phys. Rev. Lett. 71*, 4287. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.4287 3.