



Balance de Energía y Entrelazamiento Cuántico en un sistema de dos cúbits

**José Román Castro San Agustín
Manuel Ávila Aoki**

Centro Universitario UAEM Valle de Chalco, UAEMex

Resumen

Se investiga cual es la ley de conservación que subyace con la pérdida ó ganancia de entrelazamiento por un sistema de cúbits. Se encuentra que la pérdida (ganancia) de entrelazamiento cuántico implica que el sistema ceda (absorba) energía de los alrededores a temperatura constante.

Palabras clave: termodinámica, entrelazamiento, balance de energía, entropía

Abstract

It is investigated what is the conservation law that underlies with the loss (gain) of quantum entanglement of a system of qubits. It is found that loss (gain) on quantum entanglement implies that the system gives (absorb) energy of the environment at constant temperature.

Keywords: thermodynamics, entanglement, energy balance, entropy

Introducción

El entrelazamiento cuántico es un ingrediente básico en el Procesamiento Cuántico de la Información (PCI). El entrelazamiento cuántico es importante en Teleportación Cuántica (Bennet et al. , 1993), Codificación Densa Cuántica (Bennet, 1992) y Criptografía Cuántica (Ekert, 1991). También es útil en Mecánica Cuántica (Bell, 1965). Debido a la importancia del entrelazamiento cuántico hay una intensa búsqueda en mecanismos eficientes de generación de entrelazamiento cuántico (Zhang, 2021). Existen diversas formas de medir entrelazamiento cuántico siendo su única característica de todas ellas que sus valores son positivos. El entrelazamiento cuántico normalizado entonces puede valer desde cero para estados no entrelazados hasta el valor de

uno para estados máximamente entrelazados. Una estrategia muy común para generación de entrelazamiento cuántico es preparar tanto teóricamente como experimentalmente estados entrelazados. Se ha buscado preparar tales estados en diversas diferentes formas tales como estados Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) (Raimond, 2001) y estados tipo W (Cirac, 1994). Entonces generación de entrelazamiento consiste básicamente en partir de un estado inicial de entrelazamiento nulo y concluir en un estado final de entrelazamiento no nulo o incluso la unidad (Zhang, 2010). Partiendo del Principio de Lavoisier (Klein, 2007) “Nada se crea, nada se destruye solo se transforma” surge la siguiente pregunta: ¿De dónde viene el entrelazamiento cuántico generado? En otras palabras: ¿Cuál es la ley de conservación que está detrás de la generación de entrelazamiento cuántico? Para responder esta pregunta en el presente trabajo se considera un sistema de dos cúbits superconductores a bajas temperaturas para evitar su indeseado ruido cuántico y se manipula un resonador con campos de microondas actuando sobre el sistema. Lo anterior inspirado en el esquema de Yang et al. (2003) donde se generan estados máximamente entrelazados para dos cúbits superconductores. Es hallado que si se acepta que entrelazamiento cuántico es la entropía de un sistema entonces el responsable de la generación de entrelazamiento es el incremento de la energía interna del sistema de acuerdo a la Primera Ley de la Termodinámica (Van Ness, 1983). Lo anterior es válido sólo a baja temperatura constante. El presente trabajo se organiza como sigue: En la sección de Materiales y métodos se presentan los desarrollos metodológicos, en la sección de Resultados se describen los resultados, en la sección de

Discusión se proporciona una breve discusión de los resultados obtenidos mientras que en la sección de Conclusiones se sintetiza el trabajo.

Materiales y métodos

- El Hamiltoniano

Se considera un Dispositivo de Interferencia Cuántica Superconductor (DICS) compuesto de dos cúbits DICS. De acuerdo con esto el Hamiltoniano de dicho sistema es (Han,1996), (Spiller, 1992)

$$H_q = \frac{Q^2}{2C} + \frac{(F-F_x)^2}{2L} - E_j \cos\left(2\pi \frac{F}{F_x}\right), \quad (1)$$

donde C es la capacitancia del dispositivo, L es la inductancia del rizo, Q es la carga total en el capacitor, F es el flujo magnético a través del anillo superconductor (F y Q son las variables conjugadas del sistema), F_x es el flujo magnético externo cuasi estático a través del anillo superconductor y $E_j = I_c F_0 / 2\pi$ es la energía del acoplamiento de Josephson siendo I_c y $F_0 = h/2e$ la corriente crítica del dispositivo y el flujo cuántico respectivamente. En Ref. (Zheng, 2000) a partir del Hamiltoniano de la Ec. (1) se derivó el siguiente Hamiltoniano efectivo en la imagen de interacción bajo la aproximación de la onda-rotante

$$H_{eff} = g_0 (I_1 I_2 + \sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_1^- \sigma_2^+), \quad (2)$$

donde $g_0 = \frac{(g^* \Omega)^2}{d-\delta}$ y $1/d^* = (\frac{1}{\delta} + 1/d)$ siendo g^* una constante de acoplamiento de transiciones entre los niveles $|0\rangle$ y $|2\rangle$ del DICS, Ω la frecuencia de Rabi, $d = \omega_2 - \omega_1 - \omega$, ω_1 , la energía del nivel $|1\rangle$, $|1\rangle$ la energía del nivel $|2\rangle$, ω_F la frecuencia del resonador y ω es la energía de transición entre los niveles $|0\rangle$ y $|2\rangle$. En la ecuación (2) σ_a^+ (σ_a^-) es el operador de ascenso (descenso) de momento angular de espín del cubit a

($a=1,2$). En dicha ecuación se ha hecho la constante de Planck reducida igual a 1.

- Entropía

Es bien sabido que en un sistema bipartito, las correlaciones cuánticas están descritas por la información cuántica mutua (Maziero et al., 2009) la cual está dada por $\tau(\rho_S) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_S)$ donde $S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho)$ es la entropía de Von Neumann de la matriz de densidad ρ y ρ_A (ρ_B) es el operador densidad reducida del subsistema A (B). Entonces si identificamos el entrelazamiento cuántico con la entropía entonces por la Primera Ley de la Termodinámica se tiene que para un proceso adiabático isoterma (temperatura constante) donde no hay intercambio de calor con los alrededores el cambio en energía interna del sistema estará relacionado al entrelazamiento a través de (Van Ness, 1983)

$$\Delta U = T \Delta C, \quad (3)$$

donde ΔU es el cambio de la energía interna, T es la temperatura y ΔC es el cambio en el entrelazamiento. De la Ec. (3) se puede observar que se consigue una óptima generación de entrelazamiento cuántico i.e. $\Delta C = C_f - C_i > 0$ si $\Delta U = U_f - U_i > 0$ a bajas temperaturas. Por cierto, se dice que el sistema está máximamente entrelazado si $C=1$. Por otra parte se dice que el estado es separable o no entrelazado si $C=0$.

- Generación de entrelazamiento cuántico

Si el sistema de dos cúbits incrementa su entrelazamiento cuántico, el sistema tendrá que tomar energía de los alrededores para ello. Es decir, para ganar entrelazamiento cuántico se deberá invertir energía en el sistema tal como lo muestra la Ec. (2). Un asunto que está por determinarse es el referente a la temperatura a las

cuales se alcanza generación máxima de entrelazamiento cuántico.

Para un sistema de dos cúbits un estado máximamente entrelazado es (Nielsen, 2000) $|Q_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2)$ mientras que un estado separable o no entrelazado es $|Q_i\rangle = |0\rangle_1|0\rangle_2$. Generación máxima de entrelazamiento se llevaría a cabo en una transición $|Q_i\rangle \rightarrow |Q_f\rangle$. Es decir, para dicha transición se tendría que $\Delta C = C_f - C_i = 1$. Entonces de la Ecs. (2) y (3) se tendría que entre el estado inicial de dos cúbits $|Q_i\rangle$ y el estado final de dos cúbits $|Q_f\rangle$ habría un cambio de energía interna dado por

$$T\Delta C = \Delta U = \langle Q_f | H_{\text{eff}} | Q_f \rangle - \langle Q_i | H_{\text{eff}} | Q_i \rangle. \quad (4)$$

Sustituyendo la Ec. (2) en la Ec. (4) se obtiene

$$T\Delta C = g_0. \quad (5)$$

La ecuación anterior permite ver que el añejo objetivo deseado de alcanzar un buen Procesamiento Cuántico de la Información a temperatura ambiente se puede llevar a cabo en un sistema de dos cúbits DICS cuando la frecuencia del resonador sea cercana a la resonancia del sistema, es decir $0 < \omega_F - \omega_I - \omega \ll 1$.

Resultados

Se ha encontrado que si un sistema de cúbits incrementa su cantidad de entrelazamiento cuántico ($\Delta C > 0$) entonces el sistema tiene que tomar energía de los alrededores ($\Delta U > 0$). Similarmente si el sistema de cúbits pierde entrelazamiento cuántico ($\Delta C < 0$) el sistema cede energía a sus alrededores ($\Delta U < 0$).

Discusión

Generalmente en la literatura se conside-

ra que un óptimo Procesamiento Cuántico de la Información es posible sólo para temperaturas muy bajas (Nielsen, 2000). De acuerdo a la Ec. (5) lo anterior sería posible a temperatura ambiente si la frecuencia del resonador del DICS es cercana a la resonancia. En el caso general, la Ec. (3) muestra que un incremento en el entrelazamiento cuántico es sustancialmente grande si el valor de la temperatura T es pequeño.

Conclusiones

La pérdida (ganancia) de entrelazamiento cuántico implica que el sistema ceda (absorba) energía de los alrededores a temperatura constante.

Agradecimientos

Agradecemos a SNI Conacyt

Conflictos de Interés

No existe conflicto de interés

Referencias

Bell J. S. (1966), On the problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics, Rev. Mod. Phys. 38, 1 DOI: No existe

Bennet C. H., Brassard G., Crepeau C., et al. (1993) Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, Phys. Rev. Lett. 70, 1895. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.1895>

Bennet C. H., Wiesner S. J. (1992) Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states, Phys. Rev. Lett. 69, 2881. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.2881>

Cirac J. I. and P. Zoller (1994) Preparation of macroscopic superpositions in many-

- atom systems, *Phys. Rev. A* 50, 2799. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.50.R2799>
- Ekert A. K. (1991), Quantum cryptography based on Bell's theorem, *Phys. Rev. Lett.* 67, 661. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.661>
- Han S., Rouse R., and Lukens J. E. (1996) Generation of a Population Inversion between Quantum States of a Macroscopic Variable, *Phys. Rev. Lett.* 76, 3404. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.3404>
- Klein, U.; Lefèvre, W. (2007) *Materials in eighteenth-century science*. Cambridge: MIT-Press.
- Maziero J., C'eleri L. C., Serra R. M., and Vedral V. (2009) Classical and Quantum Correlations under Decoherence, *Phys. Rev. A* 80, 044102. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.044102>.
- Raimond J. M., M. Brune, and S. Haroche (2001) Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity, *Rev. Mod. Phys.* 73, 565. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.73.565>
- Spiller T. P., Clark T. D., Prance R. J. et al. (1992) Quantum Computing and Quantum Bits in Mesoscopic Systems, *Prog. Low Temp. Phys.* 13, 219, Springer.
- Van Ness H. C. (1983) *Understanding Thermodynamics*, Dover Publications.
- Yang C. P., Chu S. -I, and Han S. (2003) Possible realization of entanglement, logical gates, and quantum-information transfer with superconducting-quantum-interference-device qubits in cavity QED, *Phys. Rev. A* 67, 042311 DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.042311>
- Zhang F. -Y., Chen Z. -H., Li C., and Song H. -S. (2012) Simply quantum information processing with RF superconducting qubits, *JETP Letters* 96 785 DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021364012240149>
- Zhang, Z., Yuan, C., Shen, S. et al. (2021) High-performance quantum entanglement generation via cascaded second-order nonlinear processes. *npj Quantum Inf* 7, 123. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41534-021-00462-7>
- Zheng S. B. and G. C. Guo (2000) Efficient Scheme for Two-Atom Entanglement and Quantum Information Processing in Cavity QED *Phys. Rev. Lett* 85, 2392. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.2392>