# Algunos problemas antiguos en matemáticas elementales

Foto de Andrea Piacquadio en pexels.com

**Yuri N. Skiba**

*Instituto de Ciencias de la Atmósfera y Cambio Climático, Universidad Nacional Autónoma de México*

**Abstract.**
The ancient problems presented in this article provide the reader with a wonderful opportunity to follow the development of mathematical thought since ancient times. Brief biographical comments serve as a useful addition to the text of the old problems.

***Keywords:*** Ancient problems in elementary mathematics; Effective methods for solving them by famous mathematicians.

**Resumen.**
Los problemas antiguos presentados en este artículo brindan al lector una maravillosa oportunidad de seguir el desarrollo del pensamiento matemático desde la antigüedad. Breves comentarios biográficos sirven como una adición útil al texto de los problemas antiguos.

***Palabras clave:*** Problemas antiguos en matemáticas elementales; Métodos efectivos para resolverlos por matemáticos famosos.

Los textos matemáticos más antiguos datan de principios del segundo milenio antes de Cristo. En estos textos encontramos formas bastante convenientes de resolver una serie de problemas prácticos relacionados con diversas esferas de la actividad humana (agricultura, construcción, comercio, etc.).

La experiencia demuestra que el uso de problemas antiguos en el aula y en actividades extraescolares despierta el interés por las matemáticas, anima a los estudiantes a crear de forma independiente, muestra iniciativa e ingenio, proporciona una excusa natural para pequeñas digresiones históricas sobre sus compiladores, quienes, por regla general, fueron los grandes matemáticos de su época, y sobre el estado de las disciplinas matemáticas del pasado lejano.

**Euclides de Alejandría** (323 – 283 a. C.). Se le conoce como "el padre de la geometría". Fue el fundador de la escuela de matemáticas de la ciudad. Su trabajo más famoso fue los *Elementos*, considerado a menudo el libro de texto de más éxito de la historia de las matemáticas.

**Problema 1** (Euclides). Usando una regla y un compás, construye un triángulo equilátero en el segmento AB dado. La regla no está graduada.

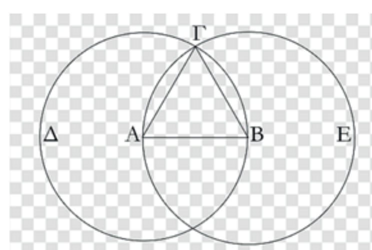
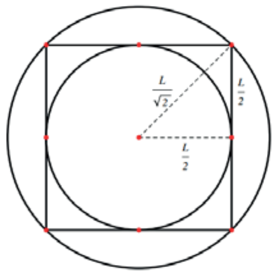



*Fig. 1.*

Solución: Construyamos dos círculos alrededor de los puntos A y B con un radio igual a la longitud del segmento AB (Fig. 1). Uno de los puntos de intersección de las circunferencias (por ejemplo, el punto $\Gamma$)



**Arquímedes de Siracusa** (287 a. C. - 212 a. C.) fue un físico, ingeniero, inventor, astrónomo, matemático y filósofo griego. Es considerado uno de los más grandes matemáticos de la antigüedad y de toda la historia en general. Entre sus logros en física se encuentran sus fundamentos en hidrostática, estática y su explicación del principio de palanca. Es conocido por desarrollar máquinas innovadoras, incluidas armas de asedio y el tornillo de Arquímedes que lleva su nombre. Notemos que Arquímedes fue el primer matemático que tuvo un conocimiento preciso de la existencia del número π.

**Problema 2** (Arquímedes). El área del círculo circunscrito alrededor de un cuadrado es el doble del área del círculo inscrito (Fig.2).

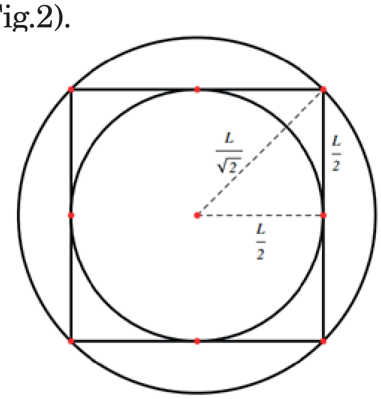



*Fig. 2.*

**Solución:** Sea el lado de un cuadrado. El área del círculo circunscrito alrededor del cuadrado es

$$S_{circ} = \pi\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi L^2$$

El área del círculo inscrito en el cuadrado es

$$S_{insc} = \pi\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi L^2$$

Por lo tanto,

$$S_{circ} = 2S_{insc}\,.$$

**Problema 3** (Arquímedes). La superficie de un segmento esférico es igual al área de un círculo cuyo radio es la línea AB que conecta la parte superior del segmento con el círculo de la base del segmento (Fig.3).

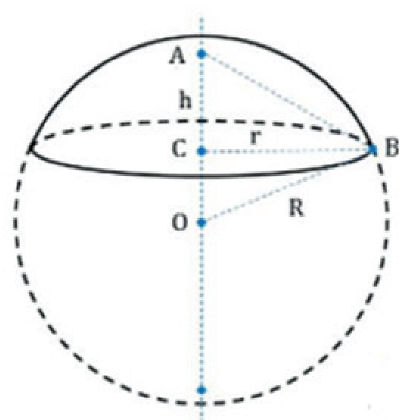



*Fig. 3.*

**Solución:** La superficie de un segmento esférico es

$$S_{segm} = 2\pi Rh\,.$$

Según el teorema de Pitágoras,

$$AB^2 = h^2 + r^2 = h^2 + R^2 - (R-h)^2 = 2Rh\,.$$

Por lo tanto, al área del círculo con radio AB es $S_{circ} = \pi AB^2 = 2\pi Rh = S_{segm}$.

**Problema 4** (Arquímedes). Una bola está inscrita en el cilindro, y la altura del cilindro es igual al diámetro de la bola (Fig.4). Demuestre que el volumen del cilindro es 3/2 del volumen de la bola y que la superficie del cilindro es 3/2 de la superficie de la bola.

Calcular el volumen de una esfera fue uno de los descubrimientos que más valoró Arquímedes de los muchos que realizó en su vida. Mostró de manera muy original que el volumen de una esfera es igual a dos tercios del volumen de un cilindro circular circunscrito a ella. Esto le causó una impresión tan fuerte que pidió grabar esta figura en su tumba en memoria de sus mejores ideas.

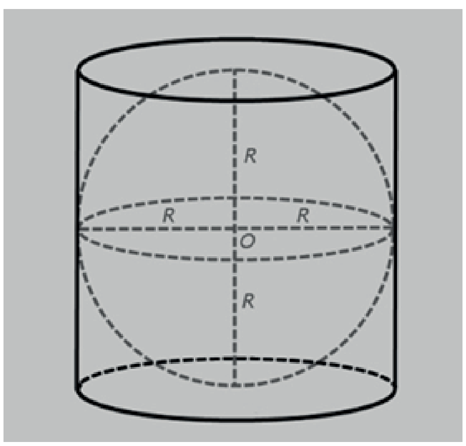



*Fig.4.*

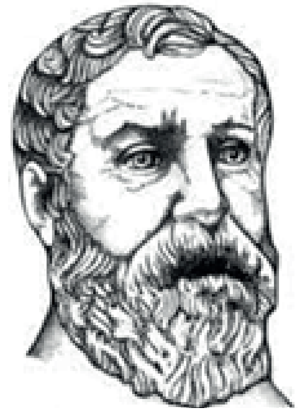
**Solución**: Teniendo en cuenta la condición del problema, obtenemos

$$V_{cil} = \pi R^2 \cdot \ 2R = \frac{3}{2} \cdot \ (\frac{4}{3}\pi R^3) = \frac{3}{2} V_{bola}$$

para el volumen del cilindro, y

$$S_{cil} = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$$
$$= \frac{3}{2} \cdot (4\pi R^2) = \frac{3}{2} S_{bola}$$

para la superficie del cilindro.



**Herön de Alejandría** (10 – 75 d.C.) fue un importante geómetra y trabajador de la mecánica que inventó muchas máquinas, incluida una turbina de vapor. Su obra matemática más conocida es la fórmula del área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados.

**Problema 5** (Herön). Dados dos puntos A y B en el mismo lado de la línea P, encuentra un punto C en P tal que la suma de las distancias de A a C y de B a C sea la más pequeña.

**Solución:** Construimos un punto D simétrico al punto B con respecto a la recta P (Fig.5). La intersección del segmento AD con la recta P es el punto C buscado, ya que ACB=ACD y ACD es el camino más corto entre los puntos A y D.

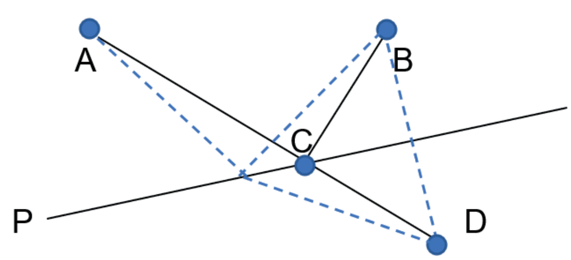



*Fig.5.*

**Problema 6** (Leyenda de Sissa). En India, había un poderoso brahmán llamado Rai

Bhalit. Ordenó a su sirviente Sissa, que creara un juego capaz de entretenerle. Sissa presentó a su señor el ajedrez. Rai Bhalit quedó tan encantado que le permitió escoger su recompensa. Sissa le dijo: «Señor, soy hombre modesto, y me conformaría con que me paguéis un grano de trigo por el primer cuadrado, dos por el segundo, cuatro en el tercero, ocho en el cuarto, etc.». El brahmán, encantado por la modesta petición accedió en seguida, pero su alegría pronto se trocaría en ira cuando se dio cuenta de que ni con todo el trigo de su país alcanzaría a pagar semejante suma. ¿Cuántos granos pidió el sabio?

**Solución** (notemos que 1 kg de trigo contiene 25,000 granos):

$$S_{64}=1+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{63}$$
$$=(2^1-1)+(2^2-2^1)+(2^3-2^2)+(2^4-2^3)+\cdots+[2^{64}-2^{63}]$$
$$=2^{64}-1=18446744073709551615.$$

**Nicómaco de Gerasa** (60 – 120 d.C.) fue un filósofo griego antiguo, matemático y teórico de la música. El tratado "Introducción a la Aritmética" escrito por Nicómaco de Gerasa en el siglo II, sirvió durante mucho tiempo como libro de texto sobre matemáticas elementales. Es una enciclopedia numérica pitagórica. La tradición de tales escritos parece remontarse a la Antigua Academia de Platón. El siguiente problema está tomado de su tratado.

**Problema 7** (Nicómaco de Gerasa). Demuestre que, si dividimos la serie de todos los números impares en grupos en los que el número de miembros aumentará como una serie de números naturales, entonces la suma de los miembros de cada grupo será igual al cubo del número de sus miembros.

**Solución:** De hecho, por verificación directa establecemos que, si una serie de números impares se divide en grupos, como lo requiere la condición del problema, es decir,

$$1+(3+5)+(7+9+11)+(13+15+17+19)+\cdots$$

Tenemos

$$1=1^3,$$
$$3+5=8=2^3$$
$$7+9+11=27=3^3$$
$$13+15+17+19=64=4^3, \text{ etcétera.}$$

Damos ahora una prueba general del hecho establecido. El número de términos en los primeros ($n$-1) grupos es

$$1+2+3+5+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

El último número en el ($n$-1) -ésimo grupo es $n(n-1)-1$. Por lo tanto, el primer número en el $n$ -ésimo grupo es $n(n-1)-1+2=n^2-n+1$, y en último número del mismo grupo es

$$n^2-n+1+2(n-1)=n^2+n-1$$

Por lo tanto, la suma de los miembros en el n -ésimo grupo es igual a

$$\frac{n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1}{2} \cdot n = n^3$$

lo que se necesitaba demostrar.

**Omar Jayam** (1048 – 1131 d.C.) fue un matemático, astrónomo y poeta persa. Se educó en las ciencias en su nativa Nishapur y en Balkh. Posteriormente se instaló en Samarcanda, donde completó un importante tratado de álgebra. Bajo los auspicios del sultán de Seljuq, Malik-Shah, realizó observaciones astronómicas para la reforma del calendario, además de dirigir la construcción del observatorio de la ciudad de Isfahán. La fama de Jayam en Occidente se debe fundamentalmente a una colección de cuartetos, los Rubaiyat, cuya autoría se le atribuye y que fueron versionados en 1859 por el poeta británico Edward Fitzgerald.

**Problema 8** (Omar Jayam). Resolver la ecuación $\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} = \frac{5}{4}$.

**Solución**: El mismo Omar Jayam resolvió este problema de la siguiente manera. Pongamos $\frac{1}{x} = z$. La ecuación acepta la forma

$$z^2 + 2z = \frac{5}{4}$$

Sumando 1 a los lados izquierdo y derecho, obtenemos

$$z^2 + 2z + 1 = \frac{9}{4}, \quad \text{ó} \quad (z+1)^2 = \frac{9}{4}$$

De donde $z + 1 = \frac{3}{2}$, ó $z = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $x = 2$.

**Bhaskara Acharia** (1114-1185) fue un matemático y astrónomo indio. Fue el líder de un observatorio cósmico en Ujjain, el principal centro matemático de la antigua India. Conocido por ser el creador de la fórmula cuadrática o resolvente. Las cuatro secciones de su obra principal tratan de la aritmética, el álgebra, las matemáticas de los planetas y las esferas, respectivamente.

**Problema 9** (Bhaskara Acharia). Demostrar que

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

**Solución:**

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$$

$$= \sqrt{2 + 3 + 5 + 2\sqrt{2 \cdot 3} + 2\sqrt{2 \cdot 5} + 2\sqrt{3 \cdot 5}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

**Problema 10** (Bhaskara Acharia). Encuentra un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa sea el mismo número que el área.

**Solución:**

Solución 1 (de Bhaskara): Supongamos que la hipotenusa es $(m^2+n^2)\,x$, el cateto 1 es $(m^2- n^2)\,x$ y el cateto 2 es $2mnx$, $m > n$. Según el teorema de Pitágoras,

$$[(m^2+n^2)x]^2 = [(m^2-n^2)x]^2 + [2mnx]^2$$

Además, para satisfacer la condición del problema,

$$(m^2+n^2)x = mnx^2(m^2-n^2)$$

es decir,

$$x = \frac{m^2+n^2}{mn(m^2-n^2)}$$

Por lo tanto, la hipotenusa es

$$(m^2+n^2)x = \frac{(m^2+n^2)^2}{mn(m^2-n^2)}$$

el cateto 1 es

$$(m^2-n^2)x = \frac{m^2+n^2}{mn}$$

y el cateto 2 es

$$2mnx = \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}.$$

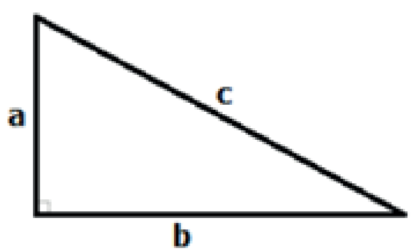



*Fig.6.*

**Solución 2** (moderna). Según el teorema de Pitágoras, $c^2=a^2+b^2$ (Fig.6), y para satisfacer la condición del problema, $c = \frac{1}{2}ab$. Es decir,

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4}a^2b^2.$$

De aquí obtenemos la razón entre los catetos del triángulo:

$$a^2 = \frac{4b^2}{b^2-4}\,, \quad b > 2$$

En particular, un triángulo isósceles es posible sólo si

$$a = b = \sqrt{8}.$$


**Franciscus Vieta** (1540-1603) fue un abogado y matemático francés. Se le considera uno de los principales precursores del álgebra. En 1571, pasó a ser abogado en el Parlamento de París, y se le nombró consejero en el Parlamento de Rennes en 1573. En 1576, entró al servicio del rey Enrique III. En 1580, pasó al servicio exclusivo del rey en el Parlamento de París. Entre los problemas matemáticos que Viète aborda, hay que citar la resolución completa de las ecuaciones de segundo grado.

**Problema 11** (Vieta). Resolver la ecuación $x^2+px+q=0$ usando la sustitución $x=y+z$.

**Solución:** Usando la sustitución x=y+z, la ecuación se obtiene la forma

$$y^2+y(2z+p)+z^2+pz+q=0$$

Aprovechando la arbitrariedad en $z$, suponemos que $2z+p=0$, es decir, $-\frac{p}{2}$. Entonces

$$z^2 + pz + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = q - \frac{p^2}{4}$$

Como resultado, $y^2 + q - \frac{p^2}{4} = \mathrm{C}$, ó

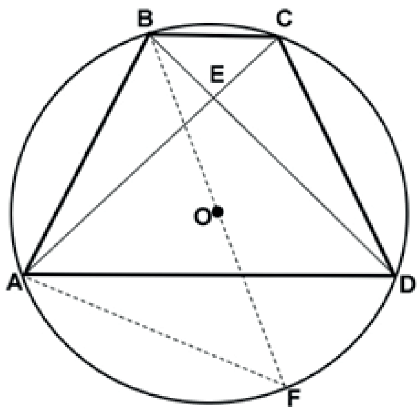
$y^2 = \frac{p^2}{4} - q$, es decir, $y = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Por lo tanto, $x = y + z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

De aquí se deduce el teorema de Vieta:

$x_1 + x_2 = -p$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q$.

donde $x_1$ y $x_2$ son dos raíces de la ecuación.




**Problema 12**. En un cuadrilátero ABCD, cuyas diagonales AC y BD son mutuamente perpendiculares (Fig.7), la suma de los cuadrados de dos lados opuestos es igual al cuadrado del diámetro d del círculo circunscrito alrededor de cuadrilátero:

$$AB^2+CD^2=d^2 \ \text{ y } \ BC^2+AD^2=d^2$$

Además,

$$BE^2+EC^2+AE^2+ED^2=d^2.$$

**Brahmagupta** (590-670)
Se desconoce el autor de este problema. Sin embargo, incluso en la antigüedad, Arquímedes sabía la última fórmula. Una serie de problemas interesantes sobre un cuadrilátero inscrito en una circunferencia pertenece al matemático y astrónomo indio Brahmagupta

**Solución**: Usaremos las siguientes tres propiedades:

1) Un ángulo inscrito es la mitad del arco que abarca;

2) Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco son iguales;

3) En el mismo círculo, o en círculos congruentes, dos cuerdas son iguales si y sólo si subtienden arcos iguales.

Dibujamos el diámetro BF. Tenemos $\angle BAF = 90°$ (ya que abarca el diámetro).

Sea $\cup AF$ el arco $AF$. Obviamente,

$$\cup AF = 2\angle ABF = 2(90°-\angle AFB)$$
$$= 2\,(90°-\tfrac{1}{2}\cup AB) = 2(90°-\angle ACB).$$

Además, $\angle CBD = 90°-\angle ACB$ en el triángulo rectangular ECB y, por lo tanto,

$$\cup AF = 2\angle CBD = \cup CD$$

De aquí se deduce que AF=CD. Usando el triángulo rectangular BAF, obtenemos

$$BF^2=AB^2+AF^2=AB^2+CD^2=d^2.$$

De la misma manera se demuestra que $BC^2+AD^2=d^2$. Además, usando el teorema de Pitágoras, obtenemos

$$BE^2+EC^2=BC^2 \text{ y } AE^2+ED^2=AD^2.$$

Al sumar las dos últimas fórmulas obtenemos

$$BE^2+EC^2+AE^2+ED^2=BC^2+AD^2=d^2$$

lo que se necesitaba demostrar.

**Referencias**

Boyer, C, B. (1991). *A History of Mathematics*. New York, Wiley.

Calinger, R. (1999). *A Contextual History of Mathematics*. Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall.

Chistyakov, V.D. (1962). Collection of ancient problems (en ruso).

Rouse Ball, W.W. (1960). *A Short Account of the History of Mathematics*. New York, Dover Publications.