

A satellite view of Earth at night, showing the curvature of the planet and the glowing atmosphere. The landmasses are dark, with numerous small, bright yellow and orange lights representing city lights. The ocean is a deep blue. The horizon is a thin, bright blue line.

Retos y Oportunidades en el Estudio de las Ciencias Atmosféricas en México

Marco. A. Núñez
Departamento de Física,
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

Resumen

En este trabajo damos un panorama de las enormes necesidades nacionales de contar con recursos humanos debidamente preparados en ciencias atmosféricas y lo que son éstas últimas. Reportamos resultados de investigación sobre tres problemas de interés meteorológico: (a) La importancia del balance de masa de un campo de velocidad atmosférico para modelos de transporte de contaminantes atmosféricas, (b) un método para estimar campos de velocidad que conserva la masa con alta precisión, y (c) el rango de validez espacial limitado de algunos modelos computacionales de pronóstico usados en México y el extranjero. Las aplicaciones de la investigación en ciencias atmosféricas en otras áreas como la hidrología, la oceanografía, la mecánica de fluidos en general, y la física médica, se describen brevemente.

1. Introducción

La comprensión de la dinámica atmosférica es un problema importante para instituciones nacionales, públicas y privadas, con carácter federal y estatal, porque los fenómenos atmosféricos tienen un impacto directo en áreas de seguridad nacional, entendiéndose por éstas, las vinculadas con la integridad del territorio nacional y su población en el corto y largo plazo, como son: (a) Protección civil ante desastres provocados por fenómenos hidrometeorológicos como tormentas severas o huracanes; (b) la agricultura, ganadería y seguridad nacional alimentaria ante sequías; (c) la ecología, el ordenamiento territorial y la administración sustentable de recursos; (d) las comunicaciones aéreas, marítimas y terrestres; (e) el sector energético, el diseño y construcción y generación de energía por medio de fuentes renovables; (f) el sector salud y la seguridad hídrica. La importancia de los fenómenos atmosféricos contrasta con la poca oferta de planes de estudio a nivel de licenciatura y posgrado en ciencias atmosféricas en México. En este trabajo damos un panorama de las necesidades y oportunidades laborales en México (sección 2), lo que son las ciencias atmosféricas (sección 3), el importante problema operacional de asimilación de datos (sección 4), y de la necesidad de revisar y profundizar en el desarrollo de métodos de asimilación y modelos teóricos, por medio de resultados de investigación en el departamento de física de la universidad autónoma metropolitana, unidad iztapalapa, sobre tres problemas de interés

operacional: la importancia de generar campos de velocidad atmosféricos que conserven la masa (sección 5), cómo pueden mejorarse los métodos para estimar dichos campos (sección 6), y las limitaciones que tienen modelos de meso escala atmosféricos por medio de soluciones lagrangianas de la ecuación de movimiento (sección 7). Las relaciones con áreas como la hidrología, oceanografía, la mecánica de fluidos experimental, la física médica, se indican a lo largo del trabajo.

2. Demanda nacional de profesionales en ciencias atmosféricas

Los cambios en el clima terrestre ha generado un esfuerzo internacional importante por entender los diferentes procesos físicos, químicos y biológicos involucrados, con el propósito de implementar las políticas apropiadas para reducir los efectos adversos y garantizar el desarrollo sustentable de la humanidad [1]. En el ámbito nacional, esto ha motivado la implementación de políticas en diferentes niveles de gobierno, así como la actualización de la legislación en los niveles federal y estatal, para tratar de enfrentar los efectos del cambio climático. Por ejemplo, en enero de este año, el presidente de la República anunció la autorización a la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA) de un presupuesto de 50 mil millones de pesos para mejorar la infraestructura y afrontar el cambio climático. Este presupuesto incluye 170 millones de dólares para modernizar el servicio meteorológico nacional [2]. Desafortunadamente, como veremos abajo, el esfuerzo institucional carece de una oferta educativa nacional apropiada para formar los recursos humanos especializados en ciencias atmosféricas que se requieren.

El Servicio Meteorológico Nacional de México (SMN), con el apoyo de la Organización Meteorológica Mundial (OMM), realizó un estudio [3] sobre el grado de especialización en ciencias atmosféricas de quienes laboran en el SMN y la oferta laboral nacional, que podemos resumir como sigue: (a) Los grupos que generan la información climática no cuentan con especialistas cuya formación académica parta de estudios en la ciencia del clima. Se trata, en el mejor de los casos, de especialistas en algunos campos de la ciencia relacionados con la geografía, la ingeniería o las disciplinas ambientales. (b) Es notable la ausencia total de una unidad responsable de la formación en

meteorología y climatología y de la capacitación profesional para desempeñar las diferentes tareas específicas de los puestos de trabajo del SMN. La dotación actual de recursos humanos del SMN es insuficiente en número y en calificación profesional, para poder cumplir con las tareas propias de un servicio meteorológico nacional. (c) En el mercado laboral no existe el número necesario de personas con la calificación requerida en meteorología y climatología, para ser contratadas e incorporadas de forma inmediata y suplir las necesidades del SMN. Por lo que es prioritario definir una política de formación en meteorología y clima de amplio alcance, a mediano y largo plazo. Destaca la carencia en el SMN de científicos de alto nivel académico para el desarrollo de investigación aplicada y mantener una cooperación activa con universidades e instituciones especializadas en los campos relacionados.

Para tener una idea del número necesario de licenciados en ciencias atmosféricas que necesita México, podemos decir que parte del presupuesto aprobado para modernizar el SMN, se destinará a la contratación de aproximadamente 400 profesionales en ciencias atmosféricas en los próximos cuatro años para crear once centros regionales dedicados al análisis y pronóstico meteorológico y la agencia nacional de huracanes y tormentas severas [4].

3. Un panorama breve de las ciencias atmosféricas

El clima de la Tierra está determinado por la interacción de los principales sistemas terrestres, a saber, la atmósfera, la hidrósfera, la criósfera, la litósfera, y la biósfera [5]. La dinámica de cada uno de estos sistemas es extremadamente compleja porque sus diferentes subsistemas interactúan en forma no lineal y en un amplio intervalo de escalas espaciales y temporales. Por lo que el estudio integral del clima requiere de profesionales dedicados al análisis de cada sistema y de sus relaciones con los demás sistemas terrestres. Por la enorme diversidad de escalas espaciales y temporales de los procesos atmosféricos podemos decir que la atmósfera es el más dinámico de los sistemas que componen a la Tierra.

Las ciencias atmosféricas estudian las leyes y procesos fisicoquímicos que explican los fenómenos atmosféricos relacionados con el tiempo y clima

tales como tormentas, huracanes, tornados y sequías, así como su aplicación al estudio de sus efectos, en el corto y largo plazo, en la agricultura, las comunicaciones, el manejo sustentable de recursos, la salud pública, entre otros. De acuerdo con la Organización Meteorológica Mundial [5] los términos *ciencias atmosféricas* y *meteorología* tienen el mismo significado. En lo que sigue usaremos el término meteorología por brevedad. A continuación daremos una breve visión de las ciencias y disciplinas meteorológicas, las cuales se distinguen para facilitar el diseño de planes de estudio, más que para diferenciar dichas disciplinas.

El estudio de los procesos atmosféricos requiere conocimientos de física, química, matemáticas y computación, que se adquieren en los dos primeros años de la licenciatura de física. Los temas requeridos en matemáticas son: Álgebra lineal, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, probabilidad y estadística, y métodos numéricos. Los temas en física son: Mecánica clásica de partículas y sistemas de partículas, termodinámica, teoría ondulatoria, mecánicas de fluidos, teoría electromagnética y fundamentos de mecánica cuántica. Los temas en química son: fisicoquímica básica, termodinámica química, soluciones acuosas y fotoquímica introductoria.

Las disciplinas que integran las ciencias atmosféricas son las siguientes [5]:

Meteorología física. Trata de explicar los fenómenos atmosféricos por medio de un conocimiento de los principios físicos básicos de la mecánica (clásica y cuántica), la termodinámica y la teoría electromagnética. Estas áreas dan las bases necesarias para el estudio de temas tales como la estructura física y composición química de la atmósfera, la radiación solar y terrestre, la física y química de los aerosoles, los procesos de la capa límite, la microfísica de nubes y la precipitación, la electricidad atmosférica, los procesos a pequeña escala como la turbulencia, las bases de la tecnología del sondeo remoto de la atmósfera, y la contaminación atmosférica. *Meteorología dinámica.* Estudia los movimientos atmosféricos como soluciones de las ecuaciones fundamentales de hidrodinámica y termodinámica u otros sistemas de ecuaciones apropiadas para situaciones

especiales, como en el caso de la teoría estadística de turbulencia. Es necesario una sólida formación en matemáticas y dinámica de fluidos, lo que da una base científica para la comprensión del rol físico de los movimientos atmosféricos en la determinación del tiempo y el clima en todas las escalas (la planetaria, la sinóptica, de meso escala y micro escala). Este conocimiento es fundamental para el desarrollo de métodos prácticos de pronóstico numérico del tiempo y el clima.

Meteorología sinóptica. Estudia la información del tiempo para diagnosticar la estructura atmosférica y anticipar su evolución futura. Este análisis considera regiones de decenas de kilómetros hasta la escala planetaria y e incorpora métodos sofisticados para analizar bases de datos operacionales, conjuntos estandarizados de mapas y diagramas de diagnósticos meteorológicos hechos automáticamente, resultados de pronóstico numérico del tiempo, y herramientas de sondeo remoto como imágenes de satélite y radares. *Climatología.* La climatología tradicional estudia el estado físico promedio de la atmósfera con sus variaciones estadísticas en espacio y tiempo en un período de muchos años. Sin embargo, se ha reconocido que el sistema climático debe incluir otros componentes del sistema Tierra, por lo que la climatología actual estudia tanto procesos meteorológicos, como procesos físicos y químicos en los océanos y a lo largo y ancho de la gran diversidad de regímenes de terrenos en la superficie del planeta. La integración de datos y conocimiento de la atmósfera, oceanografía e hidrología se hace esencial. El clima es visto como la estadística a largo plazo que describe el sistema acoplado atmósfera-océano-tierra, promediado sobre un período de tiempo apropiado. El análisis de la evolución del sistema tierra ha dado a la climatología moderna un alcance mayor al definir métodos que permitan estudiar los cambios potenciales el clima global y regional por la acciones de las actividades humanas al modificar significativamente las concentraciones de gases de invernadero y los aerosoles en la atmósfera y los patrones de la cobertura vegetal del planeta.

4. Asimilación de datos: un problema fundamental en meteorología y otras áreas

La dinámica atmosférica desde la escala planetaria hasta la micro escala se estudia por medio de las

ecuaciones de movimiento, continuidad, energía termodinámica y la ecuación de estado de gas ideal [6]-[9],

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{g} + \mathbf{f} \quad (4.1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = Q_\rho \quad (4.2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = Q_\theta, \quad \theta \equiv T_v (p_{00}/p)^{R_d/C_p}, \quad (4.3)$$

$$p = RT_v\rho \quad (4.4)$$

donde \mathbf{v} , ρ , p , son la velocidad, densidad y presión atmosférica, \mathbf{g} y $\boldsymbol{\Omega}$ son la aceleración gravitacional y velocidad de rotación de la Tierra, \mathbf{f} es la resultante de fuerzas adicionales a la gravedad, θ es la llamada temperatura potencial, $T_v = (1 + 0.6q) T$, q y T son la temperatura virtual, la humedad específica del vapor de agua y la temperatura termodinámica, respectivamente, p_{00} es una presión de referencia, R_d y C_p son la constante de gas y C_p capacidad calorífica de la atmósfera seca, Q_ρ y Q_θ cuantifican las fuentes y sumideros de masa y energía. La forma euleriana de las ecuaciones (4.1) - (4.4) se obtiene substituyendo el lado derecho de la relación siguiente

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

El estudio de la dinámica atmosférica no se reduce a la solución de las ecuaciones hidrodinámicas (4.1)-(4.4).

Un problema operacional fundamental es *la estimación del estado de la atmósfera con tanta precisión como sea posible en instante t_0* [10], [11]. En la práctica esto equivale a obtener una estimación espacial de ρ , p , T , θ , \mathbf{v} , en un instante t_0 , a partir de los datos medidos a escala planetaria por redes meteorológicas, las cuales incluyen radares y satélites meteorológicos, y datos estimados con modelos numéricos de pronóstico.

Este problema se denomina *asimilación de datos atmosféricos* y constituye una de las áreas de investigación más activas a nivel internacional, por su complejidad matemática y computacional e importancia operacional. El énfasis en la precisión se debe a los resultados de Lorenz [12], [13], quien demostró que las ecuaciones hidrodinámicas (4.1) - (4.4) tienen soluciones altamente sensibles a las condiciones iniciales, de manera que una pequeña perturbación en los datos del problema puede dar soluciones completamente diferentes en un intervalo de tiempo relativamente pequeño. Este resultado y otros similares son la base de la teoría del caos la cual

establece un límite a la capacidad de modelos deterministas para predecir la evolución temporal y espacial de un sistema [14].

Las dimensiones de la atmósfera hacen imposible tener una medición en un instante t_0 de cada variable en una malla espacial con alta resolución, por lo que estas mediciones se complementan con las estimaciones de modelos numéricos al tiempo t_0 . La integración de esta información no se reduce a la interpolación de los datos, el proceso de asimilación de datos debe dar variables atmosféricas $p_0(t_0, \mathbf{r})$, $p_0(t_0, \mathbf{r})$, $T_0(t_0, \mathbf{r})$, $\theta_0(t_0, \mathbf{r})$, $\mathbf{v}_0(t_0, \mathbf{r})$, que sean congruentes con las ecuaciones hidrodinámicas. Habiendo obtenido una estimación al tiempo t_0 de cada variable, el paso siguiente es la solución de las ecuaciones (4.1)-(4.4) para obtener una estimación en un tiempo t_1 , y el proceso se repite, las estimaciones numéricas en t_1 se usan para complementar los datos medidos hasta dicho instante y obtener nuevas estimaciones $p_0(t_1, \mathbf{r})$, $p_0(t_1, \mathbf{r})$, $T_0(t_1, \mathbf{r})$, $\theta_0(t_1, \mathbf{r})$, $\mathbf{v}_0(t_1, \mathbf{r})$, con las cuales se resuelven nuevamente las ecuaciones hidrodinámicas, y así sucesivamente. A este proceso se le denomina asimilación de datos intermitente o en 4D, por integrar información espacial (3D) y temporal (1D) cada 6 horas en los principales centros de análisis meteorológico. Las áreas de las matemáticas y computación involucradas son la teoría de sistemas dinámicos no lineales, problemas inversos y control de sistemas distribuidos, procesos estocásticos, la minería de datos y la integración de la red global de medición de datos meteorológicos [10], [11]. La teoría de procesos estocásticos merece especial mención por dar un camino para tratar con la incertidumbre presente en todo el proceso de modelación atmosférica, desde los errores en los datos hasta los límites de predictibilidad impuestos por las soluciones caóticas de las ecuaciones (4.1)-(4.4).

La asimilación de datos no es un problema exclusivo de la meteorología, este problema aparece en todas las ciencias por que el estudio en tiempo o espacio de cualquier sistema requiere de un análisis de la información disponible en la mejor forma posible, lo que puede apoyarse en modelos matemáticos deterministas o estocásticos que establecen relaciones básicas entre las variables del sistema de interés.

Esta es la idea de, por ejemplo, los filtros del Kalman [10], [11], los cuales tratan de hacer un uso óptimo de los datos disponibles de un sistema gobernado por ecuaciones de evolución como la segunda ley, las ecuaciones hidrodinámicas, o sus versiones discretas. Por lo que el estudio de métodos de asimilación de datos atmosféricos da un camino para desarrollar métodos de análisis de información en otras áreas de las ciencias básicas y la ingeniería, las ciencias sociales y biológicas.

El desarrollo de métodos de asimilación se complementa con el desarrollo permanente de modelos físicos, químicos y matemáticos apropiados para el estudio de los fenómenos atmosféricos en sus diferentes escalas espaciales y temporales. Por ejemplo, la caracterización y modelación de la turbulencia es un problema de frontera tanto en la meteorología como en la mecánica de fluidos en general. La dinámica molecular y la física estadística están aportando resultados que permiten comprender mejor el papel que juegan los aerosoles en la formación de nubes [15]. En las secciones siguientes daremos un panorama breve de los problemas de asimilación de datos y la necesidad de seguir revisando y mejorando los modelos teóricos para el diagnóstico y pronóstico meteorológico en diferentes escalas espaciales.

5. Importancia del balance de masa en modelos de transporte atmosférico

Una aplicación importante del campo de velocidad estimado a partir de datos operacionales, es el estudio del transporte de contaminantes atmosféricos [16]. El modelo principal para estudiar el transporte, difusión y transformación, de sustancias en la atmósfera es

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}c_i) = \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \cdot \nabla c) + R_i(t, c_1, \dots, c_n) \quad (5.1)$$

donde c_i es la concentración de la i -ésima especie, \mathbf{K}_i es el tensor de difusión, y R_i mide las variaciones de c_i por reacciones químicas [15]. Una aproximación común de la ecuación de continuidad (4.2) es

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.2)$$

con la cual la ecuación (5.1) toma la forma que resuelven la mayoría de los modelos de transporte [15], [17], a saber,

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_i = \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \nabla c_i) + R_i . \quad (5.3)$$

El problema operacional es que en un instante t sólo se dispone de un número finito de datos

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_1), \mathbf{v}(\mathbf{r}_2), \mathbf{v}(\mathbf{r}_3), \dots, \mathbf{v}(\mathbf{r}_N) , \quad (5.4)$$

en puntos $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$, sobre una malla irregular. De acuerdo con Kitada [18] los métodos para estimar \mathbf{v} a partir de tales datos dan un campo \mathbf{v}^δ con divergencia $\nabla \cdot \mathbf{v}^\delta$ del orden de $\pm 10^{-5} \text{ s}^{-1}$; δ da la divergencia como sigue

$$\delta = \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{v}^\delta . \quad (5.5)$$

Consideremos la ecuación (5.1) con un campo \mathbf{v}^δ

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}^\delta c_i) = \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \nabla c_i) + R_i .$$

Reescribiendo

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v}^\delta \cdot \nabla c_i = - (\nabla \cdot \mathbf{v}^\delta) c_i + \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \nabla c_i) + R_i . \quad (5.6)$$

vemos que el término $- (\nabla \cdot \mathbf{v}^\delta) c_i$ introduce una reacción ficticia de primer orden que varia la concentración c_i . Con una divergencia $\nabla \cdot \mathbf{v}^\delta$ de orden $\pm 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, este término es mayor por un orden de magnitud que el decaimiento natural de sustancias radiactivas (de orden 10^{-6} s^{-1}). La solución propuesta por Kitada y otros autores que han desarrollado códigos computacionales operacionales para resolver (5.1) [15], [19], [20], es ignorar el término $- (\nabla \cdot \mathbf{v}^\delta) c_i$ y considerar la ecuación

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v}^\delta \cdot \nabla c_i = \nabla \cdot (\mathbf{K}_i \nabla c_i) + R_i . \quad (5.7)$$

El problema con esta solución está en que la estructura de \mathbf{v}^δ puede diferir substancialmente de la de un campo no divergente $\mathbf{v}^{\delta=0}$. Este problema de inestabilidad estructural ha sido estudiado recientemente en un trabajo de investigación [21] del cual obtenemos los resultados siguientes.

Dado que a gran escala el movimiento vertical de la atmósfera es despreciable comparado con el horizontal, consideremos el campo de velocidad

$$\mathbf{v}^\delta(\mathbf{r}) = u^\delta(\mathbf{r}) \mathbf{i} + v^\delta(\mathbf{r}) \mathbf{j} . \quad (5.8)$$

Para conocer la estructura de \mathbf{v}^δ en la vecindad de un punto arbitrario \mathbf{r}_{00} (que por simplicidad consideramos en el origen $\mathbf{r}_{00} = \mathbf{0}$), desarrollamos \mathbf{v}^δ en serie de Taylor alrededor de \mathbf{r}_{00} . El resultado es

$$\begin{pmatrix} u^\delta \\ v^\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b - \omega \\ b + \omega & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{00} \\ v_{00} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

donde usamos δ (5.5) y los parámetros hidrodinámicos

$$\omega = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v}^\delta / 2, \quad a = (\partial_x u^\delta - \partial_y v^\delta) / 2, \quad b = (\partial_y u^\delta + \partial_x v^\delta) / 2, \quad (5.10)$$

para representar al gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{v}^\delta$ en el punto \mathbf{r}_{00} . De acuerdo con (5.9) \mathbf{v}^δ tiene la forma

$$\mathbf{v}^\delta = \mathbf{v}^{\delta=0} + \mathbf{u}^\delta + \mathbf{v}_{00}$$

donde $\mathbf{v}^{\delta=0}$ es la parte no divergente y $\mathbf{u}^\delta = \delta \mathbf{r}$ es una perturbación divergente de $\mathbf{v}^{\delta=0}$. La estructura del campo \mathbf{v}^δ está determinada por el discriminante $d^\delta = a^2 + b^2 - \omega^2$ de la ecuación de eigenvalores de $\nabla \mathbf{v}^\delta$. Los eigenvalores, $\lambda_1^\delta = \delta + \sqrt{d^\delta}$, $\lambda_2^\delta = \delta - \sqrt{d^\delta}$ muestran que el campo no divergente $\mathbf{v}^{\delta=0}$ tiene básicamente dos estructuras: elíptica ($d^\delta < 0$) o hiperbólica ($d^\delta > 0$), y la perturbación de $\mathbf{v}^{\delta=0}$ con $\mathbf{u}^{\delta \neq 0}$ puede dar lugar flujos parabólicos. Veamos los resultados posibles con valores de flujos atmosféricos de gran escala.

Definamos el valor característico de una variable $f(x, y)$ en una región $R = \{(x, y) : |x|, |y| \leq L\}$ como su valor promedio \bar{f} en dicha región. Consideremos por simplicidad $u_{00} = v_{00} = 0$. De acuerdo con (5.9) la relación entre los valores medios $\bar{x} = \bar{y} = L/2$, \bar{u} , \bar{v} , y los parámetros (5.10),

$$\bar{u} = (\delta + a) \bar{x} + (b - \omega) \bar{y}, \quad \bar{v} = (b + \omega) \bar{x} + (\delta - a) \bar{y}$$

determina los valores de a y b en términos de δ , w , \bar{u} , \bar{v} : $a = \alpha / 2 \bar{x} + w$, $b = \beta / 2 \bar{x} - \delta$, donde definimos $\alpha \equiv \bar{u} - \bar{v}$, $\beta \equiv \bar{u} + \bar{v}$. Los valores característicos de flujos con una escala $L = 10^3 \text{ km}$ son \bar{u} , $\bar{v} \sim \pm 10 \text{ ms}^{-1}$ y δ , $\omega \sim \pm 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Como ejemplo, consideremos $\delta = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $\beta = 10$, $\alpha = 1 \text{ ms}^{-1}$. Con estos parámetros el flujo $\mathbf{v}^{\delta=0}$ (5.9) es hiperbólico mientras que el flujo perturbado $\mathbf{v}^{\delta \neq 0}$ es elíptico para valores de ω en el intervalo $I_{\alpha\beta} = (\omega_c^0, \omega_c^\delta)$ determinado por

$$\omega_c^0 \equiv -(\alpha^2 + \beta^2) / 4\alpha \bar{x}, \quad \omega_c^\delta \equiv \omega_0^\delta - q \bar{x} / \alpha, \quad q \equiv \delta(\delta - \beta / \bar{x}) .$$

La Figura 1 ilustra la diferencia estructural entre $\mathbf{v}^{\delta=0}$ y $\mathbf{v}^{\delta \neq 0}$ para $\omega = -10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Esto demuestra que *no* basta

con ignorar el término $-(\nabla \cdot \mathbf{v}^\delta) c_i$ en la solución del modelo de transporte (5.7) como se ha propuesto [18], [19], sino que es fundamental trabajar con un campo \mathbf{v}^δ cuya divergencia sea tan pequeña como sea posible, para que su estructura sea parecida a la de un campo no divergente $\mathbf{v}^{\delta=0}$. Debemos agregar que la estimación considerada por Kitada $\nabla \cdot \mathbf{v}^\delta \sim \pm 10^{-5} \text{s}^{-1}$ [18] puede ser bastante optimista ya que el uso de métodos variacionales para estimar campos no divergentes puede dar campos \mathbf{v}^δ con divergencias del orden de $\pm 10^{-3} \text{s}^{-1}$ o mayores [22], [23]. En estos casos las diferencias estructurales entre $\mathbf{v}^{\delta=0}$ y su perturbación $\mathbf{v}^{\delta \neq 0}$ pueden ser mayores, lo puede explicar en parte las diferencias entre modelos de trayectorias reportadas en la literatura [20].

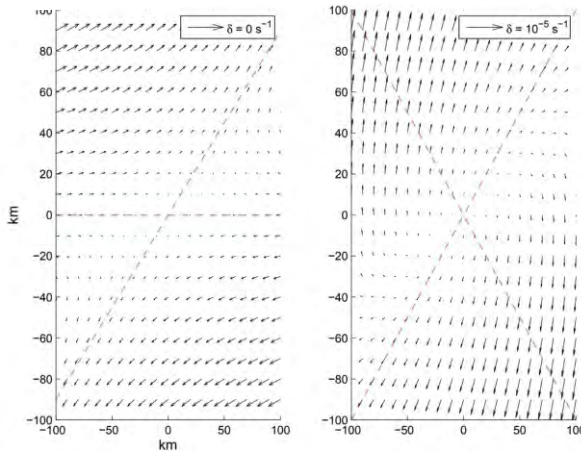


Figure 1: Campo de velocidad no divergente $\mathbf{v}^{\delta=0}$ con estructura hiperbólica, calculado con valores característicos de flujos atmosféricos con gran escala espacial: $L = 10^3 \text{ km}$, $\beta = 10$, $\alpha = 1 \text{ ms}^{-1}$, $\omega = -10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Campo divergente $\mathbf{v}^\delta = \mathbf{v}^{\delta=0} + \mathbf{u}^\delta$ con estructura elíptica, obtenido perturbado a $\mathbf{v}^{\delta=0}$ con $\mathbf{u}^\delta = \delta \mathbf{r}$, $\delta = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Las líneas punteadas dan las direcciones principales de cada campo de velocidad.

6. Un método mejorado para la asimilación variacional de datos de velocidad

La estimación del campo de velocidad de un flujo hidrodinámico a partir de datos medidos en un cierto instante t en una región finita R con frontera Γ , es un problema de interés en varias áreas de la mecánica de fluidos como meteorología [11], oceanografía [24], la mecánica de fluidos experimental [25] y la física médica [26]. La primera aproximación a este problema consiste en interpolar un conjunto de datos $\mathbf{v}(\mathbf{r}_1), \dots, \mathbf{v}(\mathbf{r}_N)$, por ejemplo, por medio de un promedio de la forma

$$\mathbf{v}^0(\mathbf{r}) = \sum_k f_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \mathbf{v}(\mathbf{r}_k)$$

donde $f_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k)$ le da mayor peso al dato $\mathbf{v}(\mathbf{r}_k)$ cuando el punto \mathbf{r} está más cerca del punto \mathbf{r}_k donde se mide

el dato [11]. El problema con este tipo de aproximaciones es que el campo interpolado \mathbf{v}^0 no satisface ninguna restricción dinámica ni condiciones a la frontera impuestas por fronteras sólidas. Una forma de ajustar el campo \mathbf{v}^0 fue propuesta por Sasaki en los años 50 del siglo pasado [27] y consiste en calcular el campo \mathbf{v}_d que minimiza el funcional

$$J(\mathbf{v}_d) = \int_R (\mathbf{v}_d - \mathbf{v}^0) \cdot \mathbb{S}(\mathbf{v}_d - \mathbf{v}^0) dR \quad (6.1)$$

sujeito a restricciones físicas de interés, donde \mathbb{S} es una matriz simétrica y positiva que generalmente se define como constante. El subíndice d indica el campo que se ha calculado por más de 30 años [28]-[30] con condiciones de frontera Dirichlet como se explica abajo. Una condición física sobre \mathbf{v}_d es la ecuación de continuidad en su forma más simple

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_d = 0 \quad \text{en } R \quad (6.2)$$

y, en los casos meteorológicos y oceanográficos, la condición a la frontera

$$\mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre el terreno o fondo marino.} \quad (6.3)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior al terreno. La minimización de $J(\mathbf{v}_d)$ con las restricciones (6.2), (6.3), da el campo de velocidad

$$\mathbf{v}_d = \mathbf{v}^0 + \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda_d \quad (6.4)$$

donde λ_d es solución de la ecuación

$$-\nabla \cdot \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda_d = \nabla \cdot \mathbf{v}^0 \quad \text{en } R. \quad (6.5)$$

Para obtener una solución única λ_d se ha usado la condición de frontera tipo Dirichlet

$$\lambda_d = 0 \quad \text{en paredes laterales y superior de } R. \quad (6.6)$$

La mejor condición a la frontera está dada por el campo verdadero \mathbf{v}_T

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre toda la frontera } \Gamma \text{ de } R. \quad (6.7)$$

El problema es que $\mathbf{v}_T \cdot \mathbf{n}$ no se conoce, excepto en las fronteras sólidas, que en meteorología coinciden con el terreno. La propuesta reportada recientemente [22], [23], es la siguiente. Dado que las redes operacionales meteorológicas sólo miden las componentes horizontales del campo de velocidad, el campo inicial tiene la forma $\mathbf{v}^0 = u^0 \mathbf{i} + v^0 \mathbf{j}$. El campo de velocidad más simple que conserva la masa y es tangente al terreno es $\mathbf{U}^0 = \mathbf{v}^0 + w^0 \mathbf{k}$ donde la velocidad vertical w^0 se obtiene imponiendo a \mathbf{U}^0 las restricciones físicas

$$\nabla \cdot \mathbf{U}^0 = 0 \text{ en } R, \quad \mathbf{U}^0 \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre el terreno. (6.8)}$$

la cuales constituyen una ecuación diferencial ordinaria sujeta a una condición de frontera que determina unívocamente a ω^0 . El campo de velocidad ajustado \mathbf{v} se define como el campo que minimiza $J(\mathbf{v})$ sujeto a (6.2) y la condición a la frontera

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}^0 \cdot \mathbf{n} \text{ sobre toda la frontera } \Gamma. \quad (6.9)$$

Omitimos el subíndice d para distinguir a \mathbf{v} del campo \mathbf{v}_d obtenido con las condiciones de frontera Dirichlet (6.6). El campo está dado por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda \quad (6.10)$$

donde λ es solución de la ecuación

$$-\nabla \cdot \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda = \nabla \cdot \mathbf{v}^0 \text{ en } R. \quad (6.11)$$

sujeta a las condiciones de frontera puramente Neumann

$$\mathbf{n} \cdot \mathbb{S}^{-1} \nabla \lambda = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{U}^0 - \mathbf{v}^0) \text{ sobre toda la frontera } \Gamma. \quad (6.12)$$

Un criterio para comparar la precisión con la cual \mathbf{v}_d y \mathbf{v} satisfacen la ecuación de continuidad (6.2) lo da el flujo de cada campo en una subregión R^* con frontera Γ^*

$$\mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}_d) = \oint_{\Gamma^*} \mathbf{v}_d \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma^* \quad (6.13)$$

Un criterio más completo lo da el cálculo de la masa que fluye en un tiempo t a través de la frontera Γ^* de R^* y comparar dicha masa con la masa M^* en R^* . De acuerdo con la ecuación de continuidad (6.2) la masa en R^* es constante y está dada por $M^* = \rho V^*$ donde V^* es el volumen de R^* . La masa que transporta \mathbf{v}_d por la frontera Γ^* en un tiempo t es $M_t^* = t \rho \mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}_d)$. El porcentaje de masa que fluye por la frontera Γ^* respecto a lo que idealmente es una masa constante M^* , es

$$\%M^* = 100 \frac{M_t^*}{M^*} = \frac{100t}{V^*} \mathcal{F}(\Gamma^*, \mathbf{v}_d) \quad (6.14)$$

Como ejemplo consideremos una región plana R con una base de $31.2 \times 31.2 \text{ km}^2$ y una altura de 4 km y subregiones de la forma $R^* = (a, b)^2 \times (c, d)$. El campo inicial $\mathbf{v}^0 = u^0 \mathbf{i} + v^0 \mathbf{j}$ tiene las componentes

$$u^0 = v^0 = \beta g(x) g(y) f(z), \quad (6.15)$$

con $f = ze^{-z/H}$, $H = 10 \text{ km}$, $g = 1 - \cos \omega x$, $\omega = \pi/2x_M$ y el parámetro $\beta = 4.9 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ se obtiene imponiendo a u^0 y v^0 un valor promedio en R de 10 ms^{-1} . El tiempo característico t está determinado por el tiempo que le

toma a una partícula de aire ir de $x = 0$ a $x = 31.2 \text{ km}$ con una velocidad media de 10 ms^{-1} . En nuestro caso tenemos $t_c = \langle u^0 \rangle / x_M = 52 \text{ min}$. Las problemas (6.5), (6.3), (6.6), y (6.11), (6.12) se resuelven con las funciones propias del operador $L = -\nabla \cdot \mathbb{S}^{-1} \nabla$ sujeto a las condiciones de frontera de cada caso y con la matriz identidad $\mathbb{S} = I$. La tabla siguiente da los valores calculados de $\%M^*$.

Tabla I. Valores de $\%M^*$ para algunas regiones R^* , con $t = 3 \text{ h}$ y el campo inicial \mathbf{v}^0 con componentes (6.15) en la región $R = (0, 31.2)^2 \times (0, 4) \text{ km}^3$.

$R^* =$	$(13, 17)^2 \times (0, 2)$	$(10, 20)^2 \times (0, 3)$	$(5, 25)^2 \times (0, 4)$	$(0, 30)^2 \times (0, 4)$	R
\mathbf{v}_d	6×10^{-1}	2×10^{-1}	24	26	49
\mathbf{v}	3×10^{-2}	10^{-2}	4×10^{-3}	8×10^{-3}	10^{-15}

Vemos que el uso de las condiciones de frontera Dirichlet (6.6) da valores irrealistas de $\%M^*$ como 24% o 49%, mientras que la condición de frontera (6.9) da valores verdaderamente pequeños en toda la región de interés R . Como se explica en la referencia [22], las diferencias en los resultados se debe a que las condiciones de frontera Dirichlet (6.6) inducen discontinuidades en el campo \mathbf{v}_d que deterioran bastante la precisión con la cual dicho campo satisface la ecuación de continuidad (6.2).

7. Una limitación importante de algunos modelos de meso escala

Los flujos atmosféricos de meso escala se definen como movimientos atmosféricos con una escala que va de uno a varios cientos de kilómetros. El sistema de referencia usado por la mayoría de los textos y modelos de meso escala es un sistema cartesiano xyz tangente a la Tierra, con su origen en un punto sobre un modelo esférico terrestre con longitud λ_c y latitud ϕ_c , el eje z perpendicular a la Tierra y los ejes x, y , tangentes al paralelo y al meridiano que pasan por el punto (λ_c, ϕ_c) . En este sistema de referencia la aceleración gravitacional \mathbf{g} se aproxima por

$$\mathbf{g}^0 = -g \mathbf{k} \quad (7.1)$$

con $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$, lo que da la ecuación de movimiento usada en casi toda la literatura de flujos atmosféricos de meso escala [31-41], a saber,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - g\mathbf{k} + \mathbf{f}. \quad (7.2)$$

En esta sección veremos por medio de un ejemplo que esta ecuación tiene un rango de validez espacial y temporal muy limitado comparado con los resultados de la aceleración \mathbf{g} de un modelo esférico terrestre.

En meteorología la presión p y la densidad ρ se descomponen en la forma

$$p = p_0 + \mu p_1, \quad \rho = \rho_0 + \mu \rho_1, \quad (7.3)$$

donde ρ_0 y p_0 definen un estado de referencia termodinámico conocido que satisface la ecuación hidrostática

$$-\rho_0^{-1} \nabla p_0 + \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (7.4)$$

La temperatura de referencia T_0 se obtiene con la ecuación de estado $p_0 = RT_0 \rho_0$. La descomposición (7.3) introduce nuevas incógnitas p_1 , ρ_1 , con las cuales la ecuación de movimiento (4.1) toma la forma

$$\mathbf{a} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{F} \quad (7.5)$$

con $\mathbf{F} \equiv \mu \rho^{-1} [\rho_1 \mathbf{g} - \nabla p_1] + \mathbf{f}$. Ahora consideremos la ecuación de movimiento (4.1) con una aceleración aproximada \mathbf{g}^a

$$\mathbf{a}^a = -\rho_a^{-1} \nabla p_a - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}^a + \mathbf{g}^a + \mathbf{f}. \quad (7.6)$$

donde p_a y ρ_a están dados por

$$p_a = p_0 + \mu p_{1a}, \quad \rho_a = \rho_0 + \mu \rho_{1a}, \quad (7.7)$$

Usando los valores de referencia p_0 , ρ_0 , determinados por (7.4) con la aceleración \mathbf{g} de un modelo esférico, la ecuación de movimiento (7.6) toma la forma siguiente con $\mathbf{F}_a \equiv \mu \rho_a^{-1} [\rho_{1a} \mathbf{g} - \nabla p_{1a}] + \mathbf{f}$,

$$\mathbf{a}^a = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}^a + \mathbf{g}^a - \mathbf{g} + \mathbf{F}_a \quad (7.8)$$

Para analizar la validez de \mathbf{g}^0 consideramos la aceleración gravitacional de un modelo esférico terrestre con masa uniformemente distribuida

$$\mathbf{g} = -g \frac{r_e^2}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (7.9)$$

y su aproximación inmediata

$$\mathbf{g}^s = -g \mathbf{e}_r = -g(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/r - g(z + r_e)/r \mathbf{k},$$

donde \mathbf{e}_r es el vector unitario que va del centro de masa terrestre a una partícula de la atmósfera, $r_e = 6378$ km es el radio promedio terrestre, $r = [x^2 + y^2 + (z + r_e)^2]^{1/2}$. Reemplazando $1/r$ por $1/r_e$ en \mathbf{g}^s obtenemos la aproximación

$$\mathbf{g}^{s1} = \mathbf{g}_h^s - g \frac{z + r_e}{r_e} \mathbf{k},$$

donde $\mathbf{g}_h^s \equiv -g(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/r_e$ es la proyección de \mathbf{g}^s en el plano tangente xy . Despreciando z respecto a r_e y linealizando \mathbf{g} (7.9), obtenemos las aproximaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{s2} &= \mathbf{g}_h^s - g \mathbf{k} \\ \mathbf{g}^1 &= \mathbf{g}_h^s - g(1 - 2z/r_e) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento (7.5), (7.8), y las ecuaciones de las velocidades

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

definen un sistema cerrado de ecuaciones diferenciales de primer orden que resolvimos numéricamente con el método de Runge-Kutta de cuarto orden, para una partícula atmosférica localizada inicialmente en el origen $x = y = z = 0$ con velocidad $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} \text{ ms}^{-1}$, y $\mu = 0$, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Los resultados obtenidos con \mathbf{g} y \mathbf{g}^s son idénticos, lo que no ocurre con sus aproximaciones \mathbf{g}^0 , \mathbf{g}^{s1} , \mathbf{g}^{s2} , \mathbf{g}^1 , como se ve en la Figura 2, la cual muestra que \mathbf{g}^0 da una trayectoria razonable sólo muy cerca del origen.

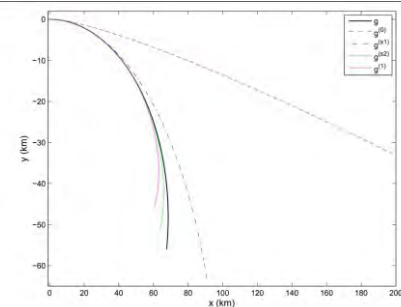


Figure 2: Trayectorias que proyecta sobre un plano tangente a un modelo esférico terrestre en un punto $(\lambda_c = 0, \phi_c = 45^\circ) = (x = 0, y = 0, z = 0)$, el movimiento de una partícula atmosférica localizada inicialmente en dicho punto con una velocidad $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} \text{ ms}^{-1}$. Las trayectorias se calcularon con la aceleración gravitacional \mathbf{g} del modelo esférico terrestre y sus diferentes aproximaciones \mathbf{g}^0 , \mathbf{g}^{s1} , \mathbf{g}^{s2} , \mathbf{g}^1 , como se indica en el texto.

El error en las trayectorias dadas por las aproximaciones \mathbf{g}^a puede medirse con la distancia entre la proyección de dichas trayectorias sobre la esfera terrestre y la proyección de la trayectoria dada por \mathbf{g} . Esta distancia está dada por

$$d^{(a)}(t) = r_e \mathbf{e}_r(\lambda_a, \phi_a) \cdot \mathbf{e}_r(\lambda, \phi),$$

donde (λ_a, ϕ_a) y (λ, ϕ) son las coordenadas esféricas en un instante t calculadas con \mathbf{g}^a y \mathbf{g} , respectivamente. La Figura 3 muestra que el error $d^{(0)}$ de \mathbf{g}^0 se incrementa rápidamente en comparación con los errores $d^{(s1)}$, $d^{(s2)}$, $d^{(1)}$, de las trayectorias dadas por \mathbf{g}^{s1} , \mathbf{g}^{s2} , \mathbf{g}^1 . La escala vertical de la Figura 3 es logarítmica por la rapidez con que $d^{(0)}$ crece. El intervalo de tiempo en cual es válido usar una aproximación \mathbf{g}^a puede estimarse fijando una cota del error $d^{(a)}$. Una cota razonable es la resolución horizontal de las mallas computacionales con las cuales se resuelven las ecuaciones de flujos de meso escala. De acuerdo con Pilke [32] la resolución horizontal puede ir de 100 m a 10 km. Consideremos una resolución intermedia de 1 km: $d^{(a)} \leq 1$. De acuerdo con esta cota, la Figura 3 indica que la integración de las ecuaciones de movimiento con \mathbf{g}^0 , \mathbf{g}^{s1} , \mathbf{g}^1 , \mathbf{g}^{s2} , es confiable en un tiempo menor a $t_{\max}^{(a)} \leq 15$ min, 1.25, 1.75, 2.15 h, respectivamente.

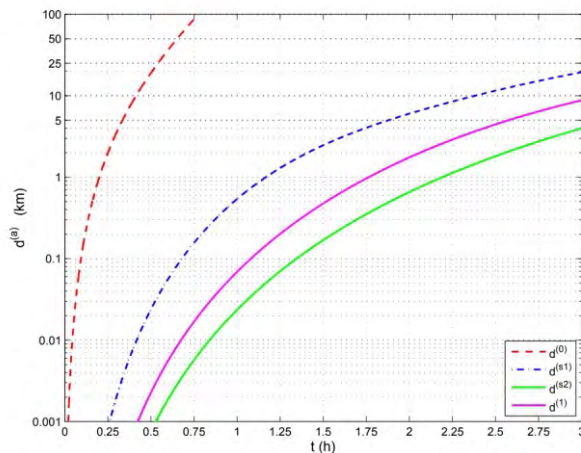


Figure 3: Comportamiento en el tiempo de la distancia sobre el modelo esférico terrestre entre la trayectoria calculada con \mathbf{g} y las trayectorias de las aproximaciones \mathbf{g}^0 , \mathbf{g}^{s1} , \mathbf{g}^{s2} , \mathbf{g}^1 .

La aproximación más usada \mathbf{g}^0 destaca por ser válida en un tiempo de integración tan pequeño.

Algunos modelos computacionales de meso escala tratan de incorporar los efectos de la curvatura terrestre por medio de proyecciones.

Un análisis de las limitaciones e inconsistencias de estos modelos y otros que usan coordenadas que siguen al terreno, se reporta en las referencias [38]–[41].

8. Conclusiones

Las necesidades nacionales de contar con recursos humanos debidamente preparados en ciencias atmosféricas, son enormes. Esto ofrece oportunidades laborales para quienes decidan dedicarse a estas disciplinas.

En el ámbito académico, los problemas que plantean las ciencias atmosféricas son enormes y sólo se irán comprendiendo poco a poco con la dedicación de las generaciones presentes y futuras. La enorme variedad procesos atmosféricos ofrece a quienes se decidan estudiar estas disciplinas, la oportunidad de aplicar sus conocimientos en otras áreas como las ingenierías, las ciencias básicas, biológicas y sus relaciones con las humanidades.

References

- [1] Intergovernmental Panel on Climate Change 1996: IPCC Second Assessment Report: Climate Change 1995, Edited by J. T. Houghton et al. and published by Cambridge University Press; see in particular The Climate System: An Overview by K. E. Trenberth, J. T. Houghton, L. G. Meira Filho; 50-64 pp
- [2] La Jornada, viernes 17 de enero de 2014.
- [3] PROYECTO DE MODERNIZACIÓN DEL SERVICIO METEOROLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO: Diagnóstico Institucional y Propuesta de Plan Estratégico 2010-2019.
- [4] Minuta de la reunión que tuvo lugar con el Coordinador del SMN el 1 de Julio de 2104, en las instalaciones del SMN.

- [5] WMO-No. 258, 2001: Guidelines for the Education and Training of Meteorological Personnel, 4th edition, 123 pp.
- [6] Dutton J. A., *The Ceaseless Wind: An introduction to the theory of atmospheric motion*, (McGrawHill, New York, 1976)
- [7] Holton J. R., *An introduction to dynamic meteorology*, 3rd. ed. (Academic Press, San Diego, 1992).
- [8] Haltiner G. J., Williams R. T., *Numerical Weather Prediction and Dynamic Meteorology* (Wiley and Sons, New York, 1980), 2nd ed.
- [9] Zeytounian R., *Asymptotic Modeling of Atmospheric Flows* (Springer, Berlin, 1990).
- [10] Kalnay E., *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*, (Cambridge University Press, New York, 2003).
- [11] Daley R., *Atmospheric data analysis* (Cambridge University Press, New York, 1991).
- [12] Lorenz E. N. 1963, The predictability of hydrodynamic flows, *Trans. NY Acad, Sci Series II* 25, 409-432.
- [13] Lorenz E. N., 1993: *The essence of chaos*. University of Washington Press, Seattle.
- [14] Monin A. S., Piterbarg L. I., *Forecasting weather and climate, in Limits of predictability*, Y. Kravtsov ed., (Springer, Berlin, 1993).
- [15] Seinfeld J. H., Pandis S. N. (2012). *Atmospheric chemistry and physics: from air pollution to climate change*. John Wiley & Sons.
- [16] Seaman N. L., "Meteorological modeling for air-quality assessments", *Atmos. Environ.* 34, 2231–2259 (2000).
- [17] Enting I. G., *Inverse problems in atmospheric constituent transport*, (Cambridge University Press, New York, 2002)
- [18] Kitada T. 1987. Effect of non-zero divergence wind fields on atmospheric transport calculations *Atmos. Environ.* 21 785-788.
- [19] Carmichael G. R., Peters L. K., Kitada T. 1986, A second generation model for regional-scale transport/Chemistry/deposition *Atmos. Environ.* 20 173. Kitada T, Carmichael G R, Peters L, *J. Clim. Appl. Met.* 23 1153.
- [20] Stohl A. 1998. Computation, accuracy and applications of trajectories-A review and bibliography. *Atmos. Environ.* 32 947-966.
- [21] Núñez M. A., Mendoza R. 2014, Structural instability of atmospheric flows under perturbations of the mass balance and effect in transport calculations, *aceptado para su publicación*.
- [22] Núñez M. A. 2102, Improving variational mass-consistent models of hydrodynamic flows via boundary conditions *Eur. Phys. J. Plus* 127 40.
- [23] Núñez M. A., Sanchez-Sanchez J. E. 2102, A formulation to compute mass-consistent models of hydrodynamic flows *Eur. Phys. J. Plus* 127 39.
- [24] Wunsch C., *The ocean circulation inverse problem* (Cambridge University Press, New York, 1996).
- [25] Raffel M., C. E. Willert, J. Kompenhans, *Particle Image Velocimetry: A Practical Guide* (Springer, Berlin, 1998).
- [26] Busch J., D. Giese, L. Wissmann, and S. Kozerke, "Construction of divergence-free velocity fields from cine 3D phase-contrast flow measurements.," *Magn. Reson. Med.*, vol. 000, pp. 1–11, Mar. 2012.
- [27] Sasaki Y., "An objective analysis based on the variational method" *J. Met. Soc. Japan* 36, 77–88 (1958); "Some basic formalisms in numerical variational analysis" *Mont. Wea. Rev.* 98, 875-883 (1970).

- [28] Ratto C. F., Festa R., Romeo C., Frumento O. A., Galluzzi 1994, Mass-consistent models for wind fields over complex terrain: The state of the art. *Environ. Software* 9 247-268.
- [29] Wang Y., C. Williamson, D. Garvey, S. Chang, J. Cogan, "Application of a Multigrid Method to a Mass-Consistent Diagnostic Wind Model", *J. Appl. Meteo.* 44, 1078 (2005).
- [30] Sanín N., Montero G. , "A finite difference model for air pollution simulation", *Adv. in Engineering Software* 38, 358–365 (2007).
- [31] Pielke R. A., *Mesoscale Meteorological Modeling* (Academic Press, New York, 1984).
- [32] Pielke R. A., *Mesoscale Meteorological Modeling* (Academic Press, New York, 2002).
- [33] Gutman L. N., *Introduction to the Nonlinear Theory of Mesoscale Meteorological Processes*, (Jerusalem, Israel Program, 1972). Yih C.-S., *Stratified Flows* (Academic Press, New York, 1980). Atkinson B. W., *Meso-scale Atmospheric Circulations* (Academic, London, 1981). Baines P. G., *Topographic Effects in Stratified Flows*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [34] Perkey D. J. , *Formulation of Mesoscale Numerical Models*, in *Mesoscale Meteorology and Forecasting*, edited by P. S. Ray (American Meteorological Society, Boston, 1986).
- [35] Atkinson B.W., *Introduction to the fluid mechanics of meso-scale flow fields*, in *Diffusion and Transport of Pollutants in Atmospheric Mesoscale Flow Fields*, edited by A. Gyr and F.-S. Rys (Kluwer, Netherlands, 1995),.
- [36] Eppel D. P. , U. Callies, *Boundary Conditions and Treatment of Topography in Limited-Area Models*, in *Diffusion and Transport of Pollutants in Atmospheric Mesoscale Flow Fields*, edited by A. Gyr and F.-S. Rys (Kluwer, Netherlands, 1995), p. 24. Durran D. R. , *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*, (Springer, New York, 1998), p. 16.
- [37] Jacobson M. Z., *Fundamentals of atmospheric modeling*, (Cambridge University Press, U.S.A, 1999), pp. 100, 74-75.
- [38] Núñez M. A., *Análisis de la consistencia dinámica de algunos modelos meteorológicos en coordenadas generalizadas*, XX Congreso Mexicano de Meteorología y V Congreso Internacional de Meteorología, Acapulco, Guerrero, México (2011).
- [39] Núñez M. A., *Analysis of some atmospheric mesoscale models*, *Revista Mexicana de Física*, Vol. 51, pp. 217-229 (2005).
- [40] Núñez M. A., *Domain of validity of some atmospheric mesoscale models*, *Il Nuovo Cimento C*, Vol. 26, pp. 469-491 (2003).
- [41] Núñez M. A., *Map projections and topography in atmospheric mesoscale modeling*, *Il Nuovo Cimento C*, Vol. 25, pp. 13-34 (2002).