De Leibniz a los reactores nucleares: el desarrollo del Cálculo fraccional

Casa abierta al tiempo

Carlos Antonio Cruz López
Área de Ingeniería en Recursos Energéticos
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Iztapalapa

Foto proporcionada por los autores

Abstract
Fractional calculus can be understood as a generalization of the classical concepts of derivatives and integrals, that provides new interpretations to well-known physical phenomena. Its development can be traced to an epistolary correspondence between Gottfried Leibniz and Guillaume de l'Hôpital in the XVII century, but their formal applications started in the last decades of the current era. Particularly, there are important applications of Fractional calculus in the nuclear engineering field, that improve classical models and develop a more realistic description of energy processes that take place in a nuclear reactor. In the present article of scientific dissemination, a gentle introduction to the meaning and to the concept of fractional calculus is given, where the main ideas and motivations of the development of this field are analyzed. Additionally, a brief discussion about its importance in the nuclear engineering field is carried out, focusing in the reformulating of mass balance equations.

Keywords: Fractional Calculus, Nuclear Engineering, Physical Modeling, Diffusion, Mass balance.

Resumen
El cálculo fraccional puede ser entendido como una generalización de los conceptos clásicos de derivadas e integrales, que proporciona una nueva interpretación a fenómenos físicos bastante conocidos. Su desarrollo puede rastrearse a la correspondencia epistolar entre Gottfried Leibniz y Guillaume de l'Hôpital, en el siglo XVII, pero sus aplicaciones formales comenzaron en las últimas décadas de la era actual. De forma particular hay importantes aplicaciones del cálculo fraccional en el campo de la ingeniería nuclear, que mejoran los modelos clásicos y desarrollan una descripción más realista de los procesos energéticos que tienen lugar en un reactor nuclear. En el presente artículo de divulgación científica, se proporciona una introducción amigable al significado y al concepto de cálculo fraccional, donde las principales ideas y la motivación del desarrollo de este campo son analizadas. Adicionalmente, se lleva a cabo una breve discusión sobre la importancia de esta teoría en el campo de la ingeniería nuclear, centrándonos en la reformulación de ecuaciones de balance de masa.

Palabras Claves: Cálculo fraccional, Ingeniería Nuclear, Modelos físicos, Difusión, Balance de masa.

1.- Introducción: la curiosidad y el asombro de los matemáticos

Es posible que el lector pueda recordar, no sin un poco de nostalgia, uno de los descubrimientos matemáticos más tempranos de nuestra vida y que por lo regular suele tener lugar en la infancia: la idea de que los números no tienen fin. Se trata de un hallazgo importante, ya sea que nos haya sido transmitido o que haya sido indagado por nosotros mismos, y que suele despertar la noción de inmensidad y de infinito en nuestras mentes. Para convencernos de este descubrimiento, basta sumar una unidad al número que propongamos como el más grande, después de lo cual tendremos un número mayor. Dado que este proceso puede repetirse, una y otra vez, terminaremos por concluir que los números no tienen fin y que por lo tanto hay una infinidad de ellos (véase la Figura 1).

Claro, hablamos de los números naturales, que son los que solemos utilizar para

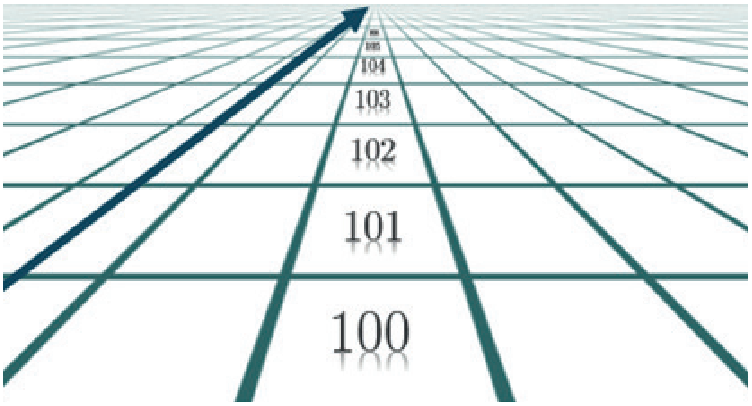

Figura 1. La idea intuitiva de que existe una infinidad de números naturales se corrobora considerando que, para cualquier número natural que propongamos como el más grande, podemos construir uno más grande sumando una unidad. Esta idea se ejemplifica con un diagrama en perspectiva donde siempre podemos avanzar hacia el horizonte, construyendo números cada vez más grandes.

contar unidades enteras positivas en el mundo real. Pero unos años más tarde de este primer descubrimiento, nos enteramos que existen otra clase de números de los que también hay una infinidad pero que, a diferencia de los naturales, nos permiten efectuar cálculos de partes no enteras. Se trata de los números racionales e irracionales. El asombro se vuelve mayor cuando descubrimos que también podemos encontrar una infinidad de estos últimos números, incluso entre dos naturales consecutivos. Esta vez, el infinito no se nos presenta necesariamente como algo enorme o sin fin, sino como algo que puede ser tan pequeño como deseemos. Así, de forma intuitiva, entendemos que la recta numérica que conocemos desde la escuela elemental no tiene huecos, sino que es un continuo y que por lo tanto en cualquier lugar que nos detengamos al recorrerla mentalmente, tendremos un número.

Detrás de muchos de estos hallazgos, algunos de los cuales no son nada intuitivos, existen tres aspectos fundamentales en el raciocinio del ser humano: el asombro, la curiosidad y la generalización. El primero constituye uno de los orígenes de la investigación y, por lo tanto, es pieza fundamental en la generación del conocimiento. En los casos descritos antes, el **asombro** es aquello que experimentamos la primera vez que somos conscientes de la no finitud de los números naturales, o cuando intentamos asimilar que aun en un intervalo de longitud pequeña, tenemos una infinidad de números racionales e irracionales, que pueden ser tan pequeños como deseemos.

La curiosidad, por otro lado, es el motor de la investigación. Es lo que en matemáticas permite que ciertas personas no solo se interesen, sino que persistan en el estudio de problemas, pese a que estos puedan involucrar una elevada dificultad o pese a que no siempre se logre encontrar una solución o respuesta. En el ejemplo anterior, la curiosidad es aquello que nos hace investigar las propiedades de cada tipo de números y determinar su comportamiento.

Finalmente, la **generalización** es aquel trabajo que realizan los matemáticos para probar, formalmente, sus hallazgos de tal manera que se tenga total certeza de que sean verdaderos. Es la culminación de este proceso de descubrimiento y generación del conocimiento, y quizá el paso con mayor dificultad.

Siguiendo esta reflexión introductoria, es posible asegurar que detrás del origen y del desarrollo del cálculo fraccional, se encuentran los tres elementos fundamentales que antes hemos descrito. Todo inició con el asombro al descubrir una ecuación, seguido después de un acto de curiosidad donde se pensó en extenderla, para usarla no solo con números naturales, sino con números racionales no enteros. Y finalmente, se llevó a cabo una formalización de dicha extensión, con el fin de estar totalmente seguros que podría usarse. En el presente artículo de divulgación científica, se discutirán de manera amigable el origen y los fundamentos de dicha disciplina, señalando cada uno de estos elementos y describiendo brevemente su aplicación práctica en el terreno de la ingeniería nuclear.

2.- Cartas entre matemáticos y su curiosidad

En su más reciente libro, el historiador Niall Ferguson menciona la eficiente forma en que se transmitía la información en el siglo XVIII gracias al desarrollo de las redes de publicaciones y correspondencia (cartas, correos), a tal punto que noticias sobre incidentes tan graves como el terremoto de Lisboa, ocurrido en 1755, fueron prontamente conocidas por habitantes de la ciudad de Ginebra, que se encuentra a más de mil quinientos kilómetros de distancia (Ferguson, 2021, p. 129). Estas redes existían desde al menos un siglo antes, a tal punto que, para muchos filósofos y matemáticos, resultaba la única forma de comunicación que existía tanto para discutir ideas como para realizar colaboraciones. Este proceso de intercambiar cartas, es lo que se conoce como una relación epistolar, siendo una de las más famosas en el mundo de las matemáticas la que se estableció entre Gottfried Leibniz y Guillaume de l'Hôpital, en el periodo de 1692-1701. Vale la pena mencionar en este punto, que al primero de estos matemáticos se le considera, junto con Isaac Newton, como el inventor del cálculo diferencial, siendo tan importante su aporte que a él debemos una de las notaciones o formas de escribir las derivadas más famosa que existen (véase la Figura 2). Justamente fue esta notación la que motivó la curiosidad de l'Hôpital, quien posiblemente guiado por un juego con los símbolos propuestos por Leibniz, como sugiere Ross

Gottfried Leibniz

(1646-1716)

Polímata alemán, que junto con Isaac Newton, desarrolló el Cálculo diferencial en el siglo XVII y mantuvo una relación epistolar con varios matemáticos importantes de su época. Propuso una de las notaciones más usadas para denotar derivadas, dada por $d^n y / dx^n$ (Muñoz Santonja, 2013), que posteriormente daría lugar al cálculo fraccional gracias a una pregunta de l'Hôpital (Ross, 1977, p. 76).

Figura 2. Breve semblanza de Leibniz.

(1977, p. 76), se preguntó qué significado tendría la siguiente expresión:

$$\frac{d^n y}{dx^n}, \text{ para } n = 1/2, \qquad (1)$$

Figura 2. Breve semblanza de Leibniz.

en otras palabras, se preguntó qué pasaría si se colocara el valor de ½ en la posición de n, en lugar de un número entero. De este modo se planteó por primera vez la pregunta sobre **¿qué significado tendría una derivada "media"?** Seguramente, estimado lector, has tenido dudas similares en cuanto a los posibles valores que puede permitir una operación o función. De hecho, parte de los temas que se estudian en los últimos semestres del bachillerato (o preparatoria), y en los primeros de la universidad, incluyen el concepto de *dominio* de una función, que nos permite determinar qué valores admite ésta y cuáles no. Y ni qué decir sobre la división por cero, que bien sabemos que no está definida. En este sentido, preguntarse si una expresión u operación matemática es válida para determinados valores, sigue un procedimiento similar, en cuanto a analizar el comportamiento de dicha relación, determinando si es válida o si tiene sentido. En nuestra discusión nos preguntamos si ¿la fórmula dada en la relación (1) admite valores no enteros en n? Leibniz respondería afirmativamente a esta pregunta de l'Hôpital, calculándola para el caso donde $y = x$:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{1/2}} = \frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}. \qquad (2)$$

¿Cómo llegó a esta expresión Leibniz?, y lo que es aún más importante, ¿qué significado tiene esta nueva operación que usa un número racional no entero como el orden de la derivada? Antes de intentar responder estas cruciales interrogantes, es importante observar que los elementos de los que hablamos en la introducción de este artículo están presentes en este intercambio epistolar: el asombro, la curiosidad y la generalización. Las primeras dos manifestadas por l'Hôpital, quién se preguntó qué significado tendría una expresión para un caso particular, y la última en la respuesta que dio Leibniz, que como veremos más adelante, consiste en formalizar y extender una definición.

3.- Integrales repetidas

Discutir la forma en cómo Leibniz resolvió el problema planteado por l'Hôpital puede no ser tan intuitiva, y por ello abordaremos un método distinto, que es más fácil y elemental de seguir. Dicho método está relacionado con el desarrollo de la integral fraccional, en lugar de la derivada, pero puede extenderse a esta última. Para ello pensemos en integrar una vez una función $f(t)$, lo cual escribiremos como:

$$\int_0^t f(t)dt. \qquad (3)$$

Hemos utilizado los límites de 0 a t, para evitar utilizar una constante de integración. Dado que el resultado de esta integral será otra función que dependerá también de t, podemos integrarla una segunda vez, es decir:

$$\underbrace{\int_0^t \int_0^t f(t)dt\,dt}_{\text{Función integrada dos veces}}. \qquad (4)$$

Por ejemplo, si nuestra función es $f(t) = t$, la podemos integrar de forma repetida en dos ocasiones, de tal forma que integramos una primera vez, y al resultado de dicha integración lo volvemos a integrar:

$$\underbrace{\int_0^t f(t)dt = \int_0^t tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^t = \frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{t^2}{2}}_{\text{Integrando una vez}},$$

$$\underbrace{\int_0^t \int_0^t f(t)dt\, dt = \int_0^t \int_0^t tdtdt = \int_0^t \frac{t^2}{2} dt = \frac{t^3}{6}}_{\text{Integrando dos veces}}. \quad (5)$$

Podemos utilizar la letra *I* con un exponente al que llamaremos "orden", encerrado entre paréntesis, para indicar el número de veces que una función es integrada de forma repetida. Por ejemplo, si efectuamos el proceso seis veces, entonces podemos escribir la integral de **orden sexto** como:

$$I^{(6)}f(t) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t f(t)dt\, dt\, dt\, dt\, dt\, dt. \quad (6)$$

Ciertamente tenemos más experiencia hablando del orden de una derivada, y por ello suele sorprendernos escuchar sobre el orden de una integral, pero debemos tener en mente que lo único que denota es el número de veces en que se debe realizar dicha operación. Generalizando lo anterior para cualquier n, tendremos:

$$I^{(n)}f(t) = \int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t)\, \underbrace{dtdt \ldots dt}_{n}, \quad (7)$$

donde los puntos suspensivos indican que la operación se está repitiendo y donde suele ser adecuado indicar el valor de n, como subíndice.

4.- Integración de Cauchy e integrales fraccionales

El proceso de integrar de manera repetida que se discutió en la sección anterior puede simplificarse si se utiliza la fórmula desarrollada por el matemático Augustin-Louis Cauchy (véase Figura 3), que puede escribirse del modo siguiente:

$$I^{(n)}f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau. \quad (8)$$

donde el símbolo "!" denota el factorial de un número, definido como el producto consecutivo de los primeros n naturales:

$$n! = 1\ 2\ 3\ n. \quad (9)$$

Augustin Louis Cauchy

(1789-1857)

Matemático francés, al que se le atribuye una buena parte del formalismo que poseen las matemáticas modernas. Fue prolífico en la cantidad de resultados y trabajos publicados, contribuyendo en ramas como Variable compleja, en Teoría de Números y en Análisis Real.

Es autor de la fórmula de integración repetida, que puede considerarse como el fundamento detrás de la idea de la integral fraccional (Belhoste, 1991).

Figura 3. Breve semblanza de Cauchy.

Nótese que la integral dada en la ecuación (8) tiene un parámetro τ, que introduce una modificación en la función, pero que no tiene un valor en concreto. La fórmula de Cauchy es en extremo valiosa, porque en lugar de integrar una y otra vez, como hicimos en la sección anterior, con dicha expresión se pueden reducir todas esas operaciones al cálculo de una sola integral, algo que no puede más que despertar sorpresa en nosotros. Por ejemplo, la integral sexta que escribimos en la ecuación (6), puede calcularse para cualquier función $f(t)$ que sea seis veces integrable, con la siguiente integral simple:

$$I^{(6)}f(t) = \frac{1}{(6-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{6-1} f(\tau)d\tau. \qquad (10)$$

Pero la importancia de este hallazgo no se reduce a disminuir el número de operaciones a una sola, sino que a partir de la ecuación (8) podemos comenzar a pensar en una integral fraccional. En efecto, tal como hizo l'Hôpital a Leibniz, podemos preguntarnos en este punto: ¿qué significaría utilizar un número racional no entero positivo, en lugar de un natural n, en dicha fórmula? Ciertamente, dicha pregunta no habríamos podido plantearla usando la ecuación (7), pero ahora, usando la relación dada en la ecuación (8), ya resulta más sencillo ver la dependencia del valor n de forma explícita y analizar cómo podemos utilizar un valor distinto ahí. Y si bien omitiremos muchos de los detalles de la formalización, para mantener el enfoque divulgativo, podemos asegurar que es posible extender dicho resultado de Cauchy, definiendo la integral fraccional (también llamada de Riemann-Liouville) como:

$$I^{(\alpha)}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau, \qquad (11)$$

donde α es justamente el orden fraccional positivo y $\Gamma(\alpha)$ denota a la función Gamma, que es una generalización del factorial dado en la ecuación (8), es decir, es la función que permite "extender" el producto de los primeros n naturales, al caso de números reales positivos. Obsérvese que esta nueva integral tiene prácticamente la misma estructura que la fórmula de Cauchy, salvo por los dos cambios mencionados antes. Sin embargo, a pesar de que podría parecer sencillo el hacer estos cambios, la realidad es que hay mucho trabajo detrás de la ecuación (11), en cuanto a probar que tal definición tiene sentido y que es posible dicha generalización. Pero esto último es trabajo de los matemáticos, quienes se encargan de corroborar y formalizar los resultados, para que todos los demás podamos aplicarlos con seguridad y confianza. De esta manera, aunque ellos no necesariamente apliquen tales hallazgos, sí desarrollan las teorías que dan soporte a gran parte del conocimiento que poseemos hoy en día. Antes de finalizar esta sección, es importante mencionar que un método similar puede seguirse para construir y justificar la definición de la derivada fraccional, a pesar de que dicha discusión no se llevará a cabo en el presente artículo divulgativo.

5.- Aplicaciones del cálculo fraccional a la ingeniería nuclear

Y si bien la curiosidad suele ser uno de los motores de la investigación en varias ramas de las matemáticas, lo que vuelve importantes a las generalizaciones que se obtienen a través de ella, es qué tan valiosas son en términos de sus aplicaciones a casos prácticos o a problemas del mundo real. En el caso del cálculo fraccional, hay muchos ejemplos donde el utilizar derivadas e integrales de orden no entero, permite modelar

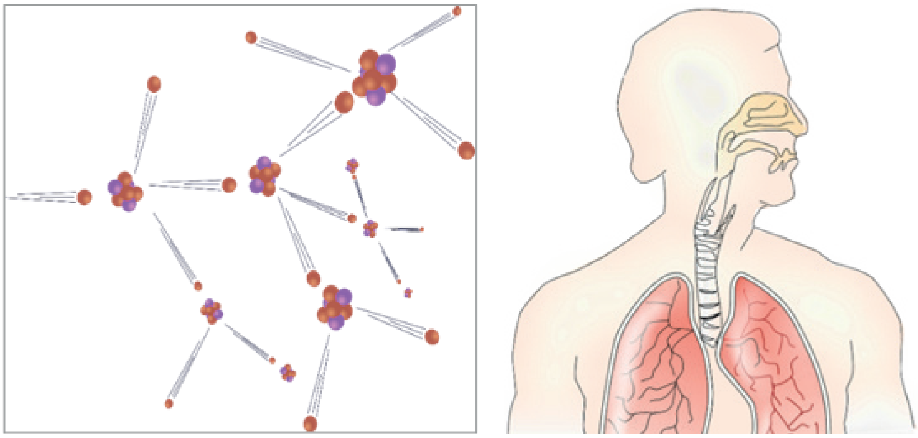

Figura 4. El proceso de difusión describe el movimiento o transporte de sustancias, moléculas y partículas, de regiones de alta concentración a regiones de baja concentración. El movimiento de neutrones en ciertos medios (izquierda), así como la absorción de ciertos fármacos en el cuerpo humano (derecha), exhiben dicho comportamiento.

con mayor precisión fenómenos físicos, químicos o económicos que ocurren en la vida diaria. Un ejemplo notable de esto último se da en la Farmacocinética, disciplina que estudia, entre otros aspectos, la forma en cómo los fármacos se distribuyen, asimilan y desechan en nuestro cuerpo.

Desde el 2009 se han desarrollado modelos fraccionales en dicho campo, los cuales permiten describir con mayor precisión la forma en cómo se difunden fármacos en el organismo. Dichos modelos se han contrastado y comparado con datos experimentales (Dokoumetzidis y Macheras, 2009) consolidándose a lo largo de la última década. En este contexto el término "difusión" se entiende como el comportamiento de ciertas sustancias, moléculas o partículas, las cuales se desplazan de regiones de mayor concentración a regiones donde esta última es menor. Muchos fármacos que se administran en el cuerpo humano suelen seguir tal comportamiento, moviéndose o transportándose de un órgano con una mayor concentración, a otro con una menor (véase Figura 4), pero también hay otros que se comportan de una forma distinta, a la que suele llamársele difusión anómala. Es justamente en estos últimos casos, los anómalos, que los modelos fraccionales suelen dar mejores resultados al describir con mayor precisión el movimiento de los fármacos, en comparación con los modelos clásicos, es decir, comparados con los modelos que usan las definiciones clásicas de derivadas e integrales. Lo que resulta extraordinario es que este comportamiento difusivo también describe, con ciertas limitaciones, el movimiento de los neutrones en un reactor nuclear de potencia, donde también se presentan fenómenos subdifusivos. De este modo, una de las aplicaciones actuales y modernas del cálculo fraccional consiste en la construcción de modelos que describen con mayor precisión el movimiento de neutrones en un reactor nuclear, al incluir los fenómenos subdifusivos mencionados anteriormente. En este punto vale la pena mencionar que dicha línea de investigación fue fundada por investigadores mexicanos (Espinosa-Paredes et al., 2011), quienes propusieron la primera ecuación constitutiva fraccional para el transporte de neutrones, y que ha tenido una relativa repercusión en el área de ingeniería nuclear, donde grupos de investigación de distintos países han retomado y extendido muchas de estas ideas (Espinosa-Paredes y Cruz López, 2024).

5.- Aplicación en reactores nucleares

La parte matemática detrás de los modelos fraccionales en reactores nucleares es bastante técnica y compleja para abordarla detalladamente, sobre todo en un artículo divulgativo, pero podemos explicarla de manera elemental desde el punto de vista de los balances de masa. ¿En qué consisten dichos balances? La idea detrás de ellos se remonta a aquel conocimiento básico que tenemos de las propiedades de la materia, según la cual ésta no se crea ni se destruye. En dicho sentido podemos cuantificar el aumento o disminución de una sustancia (o de un número de partículas o moléculas) en un determinado tiempo, en términos de las ganancias y las pérdidas que se estén produciendo en dicha sustancia o población. Por ejemplo, la velocidad con la que la cantidad de agua de un recipiente varía, estará dada en función de cuánta agua esté entrando a dicho recipiente (ganancias), menos la cantidad de agua que esté saliendo de él (pérdidas). Este mismo principio puede aplicarse para determinar la velocidad, o "tasa de cambio", de la población de neutrones en una región dada de un reactor nuclear y puede plantearse del modo siguiente:

$$\begin{bmatrix}\text{Tasa de cambio de la}\\ \text{población de neutrones}\\ \text{al tiempo } t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Tasa de ganancias}\\ \text{al tiempo } t\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Tasa de pérdidas}\\ \text{al tiempo } t\end{bmatrix}. \tag{12}$$

Observemos que las ganancias y las pérdidas no tienen por qué ser constantes, es decir, pueden variar con el tiempo y por ello se definen al tiempo t. Para ilustrar esto último, pensemos nuevamente en nuestro ejemplo del depósito de agua. Consideremos que las pérdidas están representadas por el agua que sale a través de un un orificio en la parte inferior de él. Claramente la cantidad de agua que salga del depósito dependerá de la cantidad de agua presente en él, en cuanto a que saldrá más rápido cuando el tanque esté más lleno, y más lentamente conforme éste se vaya vaciando. Esto muestra que la cantidad de pérdida varía con el tiempo, mostrando justamente que no tiene por qué ser constante. La relación (12) puede escribirse usando un lenguaje puramente matemático, al recordar que la derivada es justamente la que mide la tasa de cambio de una determinada función. De esta manera reescribimos dicha ecuación como:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\text{Población de neutrones}\\ \text{al tiempo } t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Tasa de ganancias}\\ \text{al tiempo } t\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Tasa de pérdidas}\\ \text{al tiempo } t\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Imaginemos ahora que deseamos encontrar el cambio que experimentó la población de neutrones entre el tiempo $t = 0$ y el tiempo t. En ese caso, tenemos que aplicar una integral, que en cierta manera puede considerarse como una operación que remueve la derivada, aunque no necesariamente es la operación inversa de ella. De este modo tendríamos que:

$$\begin{bmatrix}\text{Cambio en la población}\\ \text{de neutrones entre } t \ y \ 0\end{bmatrix} = \int_0^t \left(\begin{bmatrix}\text{Tasa de ganancias}\\ \text{al tiempo } t\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Tasa de pérdidas}\\ \text{al tiempo } t\end{bmatrix}\right) dt. \tag{14}$$

Es decir, integrando el lado derecho, estaremos "sumando" todas las contribuciones y las pérdidas que ocurrieron en el intervalo de tiempo dado, que sería equivalente a hacer un "balance global" para cada momento transcurrido entre el tiempo $t=0$ y el tiempo t. En este punto, sin embargo, podemos utilizar la integral fraccional, en lugar de la integral normal que hemos usado en la ecuación (14), resultando:

$$\begin{bmatrix}\text{Cambio en la población}\\ \text{de neutrones entre } t \text{ y } 0\end{bmatrix} = I^{(\alpha)}\left(\begin{bmatrix}\text{Tasa de ganancias}\\ \text{al tiempo } t\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{Tasa de pérdidas}\\ \text{al tiempo } t\end{bmatrix}\right). \quad (15)$$

que en este caso vendría a representar una forma distinta de tomar en cuenta todas las pérdidas y ganancias en un intervalo de tiempo determinado. Esta es, en esencia, la forma en cómo se incluye el cálculo fraccional en las relaciones de balance de masa de los neutrones en un reactor nuclear y la forma en que se mejora la simulación de su comportamiento.

6.- Conclusiones

En el presente artículo de divulgación se discutieron los antecedentes históricos del cálculo fraccional, haciendo énfasis en la curiosidad matemática que busca, de forma constante, generalizar relaciones o resultados. Así mismo, se explicó de forma pedagógica cómo es que se construye una integral fraccional a partir de llevar a cabo, de forma repetida, el proceso de integración. También se incluyó una discusión acerca de las aplicaciones que existen en el campo de la ingeniería nuclear y particularmente en cómo las integrales fraccionales permiten tomar en cuenta contribuciones a través de balances de masa modificados. De estos elementos es posible concluir que las ideas fundamentales del cálculo fraccional surgieron a través de un proceso que involucró el asombro, la curiosidad y la generalización, y que hoy día son relevantes gracias a sus importantes aplicaciones en la descripción de complejos fenómenos físicos, como son aquellos que ocurren en un reactor nuclear de potencia.

Agradecimientos: el autor agradece el financiamiento recibido por parte del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT), a través del programa de Estancias Posdoctorales por México, 2022, gracias a cuyo financiamiento fue posible la realización de este artículo.

Referencias

-Belhoste, B., Augustin-Louis Cauchy. A Biography. Springer-Verlag. 1991.

-Blanco, M., La correspondencia entre Leibniz y El Marqués de l'Hopital: sobre la envolvente de una familia de curvas, Quaderns d'História de L'Enginyeria, XVI, pp. 143-165, 2018.

-Dokoumetizidis, A., Macheras, P., Fractional kinetics in drug absorption and disposition processes, Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics, 36, pp. 165-178, 2009.

-Espinosa-Paredes, G., Polo-Labarrios, M. A., Espinosa-Paredes, E. G., Del Valle Gallegos, E., Fractional neutron point kinetics equations for nuclear reactor dynamics, Annals of Nuclear Energy [2-3], 38, pp. 307-330, 2011.

-Ferguson, N., Desastre. Historia y Política de las Catástrofes, Debate, España, 2021.

-Muñoz Santoja, J., El Cálculo Infinitesimal. Leibniz. La Física Aprende un Nuevo Idioma. RBA, España, 2013.

-Ross, B., A Brief History and Exposition of The Fundamental Theory of Fractional Calculus, Springer, 2006.