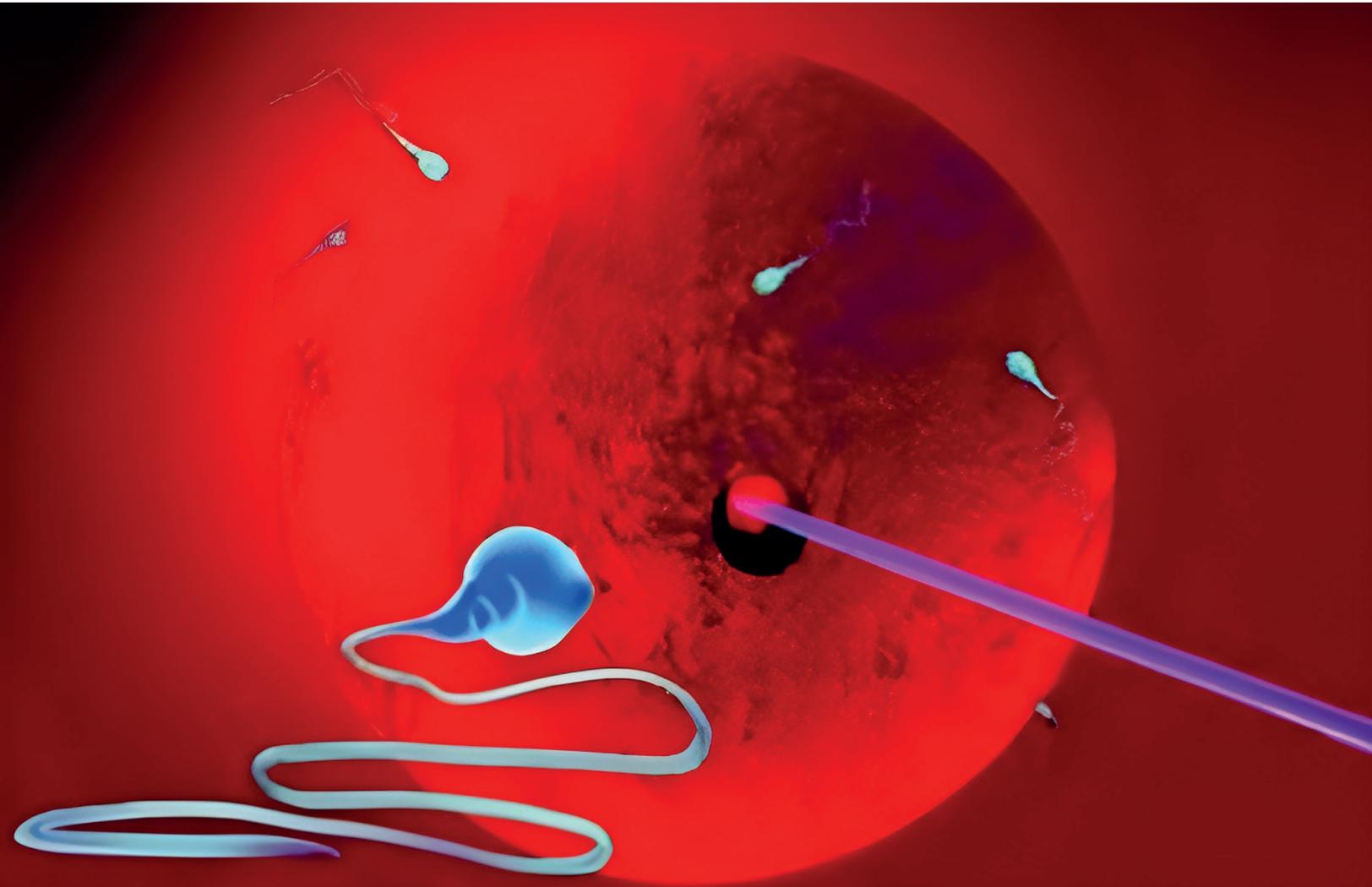


Máquinas Térmicas Brownianas



Pinzas ópticas: las delicadas manos de la luz

Dr. J. I. Jiménez Aquino
Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana



Resumen

En este trabajo de divulgación, se presenta un breve bosquejo histórico sobre cómo los conceptos teóricos y las leyes de la termodinámica clásica, fueron formulados para explicar el funcionamiento de las máquinas térmicas o dispositivos que transforman energía en trabajo útil. Cómo estos conceptos han podido extenderse para explicar también el funcionamiento de tales dispositivos dentro de un contexto teórico más realista. Hoy en día, dichos conceptos también son muy importantes para el desarrollo y construcción de máquinas de tamaño microscópico. Los científicos continúan con esta labor en el marco de una disciplina llamada *termodinámica estocástica*.

Palabras clave: Máquinas térmicas, ciclo de Carnot, eficiencia a máxima potencia, máquina térmicas brownianas.

Abstract

In this dissemination work, a brief historical sketch is presented of how the theoretical concepts and laws of classical thermodynamics were formulated to explain the operation of heat engines or devices which transform energy into useful work. How these concepts have also been extended to explain the operation of such devices within a more realistic theoretical context. Nowadays, such concepts are also very important for the development and construction of microscopic-sized machines. Scientists continue this work within the framework of a discipline called *stochastic thermodynamics*.

Keywords: Heat engines, Carnot cycle, efficiency at maximum power, Brownian heat engines.

1. Introducción

Para poder entender un poco mejor el estudio de las máquinas térmicas macro y microscópicas, en opinión del autor del presente artículo de divulgación, es conveniente hacer un breve bosquejo histórico sobre el origen y desarrollo de las máquinas térmicas que conocemos y usamos en la vida cotidiana. Y para el lector que desee profundizar más en la parte histórica, se recomienda el ejemplar de divulgación publicado por el fondo de cultura económica y que lleva por nombre: *De la máquina de vapor al cero absoluto (calor y entropía)*, cuyo autor es el Dr. Leopoldo García-Colín Scherer (1936-2012) (García-Colín, 1986).

Muchos de los dispositivos con los que tenemos contacto en nuestra vida diaria, son capaces de transformar una forma de energía en otra, usualmente en trabajo útil. Los ejemplos son diversos que van desde los focos, lámparas ventiladores, refrigeradores, calentadores de agua en el hogar, hasta los automóviles, ferrocarriles, buques de vapor, etc. Por ejemplo, el foco en nuestras casas, transforman la energía eléctrica en energía lumínica, el motor de un automóvil transforma la energía eléctrica proveniente de la batería, en energía mecánica mediante el proceso de combustión de la gasolina, permitiendo al automóvil ponerse en movimiento, etc. la pregunta que surge de inmediato sería entonces la siguiente: para estos dispositivos que transforman cierta clase de energía en otra, ¿existen leyes o principios capaces de explicar cómo se llevan acabo dichos procesos de transformación? Una rama fascinante de la Física encargada de dar respuesta a la pregunta es la llamada *Termodinámica*, cuyas bases teóricas

comenzaron a establecerse casi al final del primer cuarto del siglo XIX.

Es muy importante destacar que los dispositivos que transforman energía térmica en trabajo útil, conocidos como *máquinas térmicas*, tuvieron un auge en su desarrollo a mediados del siglo XIX, sin que hubiera una explicación científica de su funcionamiento. Así, mientras los buques surcaban los mares y las locomotoras transportaban grandes cargamentos y pasajeros de una población a otra, una teoría que guiara su camino, estaban aún en espera de su aparición. Fue el brillante ingeniero francés N. Sadi Carnot (1796-1832) en dar los primeros pasos en la explicación sobre los principios que rigen el funcionamiento de las máquinas térmicas. En su memoria publicada en 1824, con el título: *Reflexiones sobre la potencia motriz del calor y sobre las máquinas apropiadas para desarrollar esta potencia* (Carnot, 1824), Carnot propone la interrogante de cómo producir trabajo mecánico (potencia motriz) a partir de fuentes que producen calor, su idea es la siguiente: cuando una máquina térmica opera entre dos fuentes de temperatura y extrae una cierta cantidad de calor de la fuente caliente de cierta temperatura, y cede otra cantidad de calor a la fuente fría de cierta temperatura, de modo tal que ambas temperaturas sean iguales, es decir, hasta restaurar el equilibrio térmico, entonces dicho proceso debe ocurrir sin producir trabajo útil, luego entonces este proceso se considera como una pérdida real. Tomando en cuenta esta situación, Carnot sugiere que, para que una máquina térmica sea eficiente debe diseñarse de tal forma que no todo el calor absorbido sea desechable durante su operación. Es decir, se le ocurre diseñar un proceso cíclico en el que la máquina térmica extrae una cierta cantidad de calor Q_h de la fuente caliente de temperatura T_h ,

de tal manera que una parte de este calor es utilizado por la sustancia operante (en este caso el aire) para convertirla en trabajo útil $-W$, y la otra parte del calor no aprovechable Q_c sea desechada a la fuente fría de temperatura T_c , véase una representación esquemática en la figura 1 (por convención, el calor es positivo cuando la máquina absorbe calor de una fuente y negativo cuando la máquina cede calor a su entorno, igual para el trabajo). Carnot demuestra también que no puede existir una máquina térmica más eficiente operando entre dos fuentes de calor que la máquina de Carnot y establece la siguiente proposición: *la fuerza motriz del calor es independiente de las fuentes que la producen; su cantidad sólo depende de las temperaturas de las dos fuentes entre las cuales ocurre el flujo de calor.*

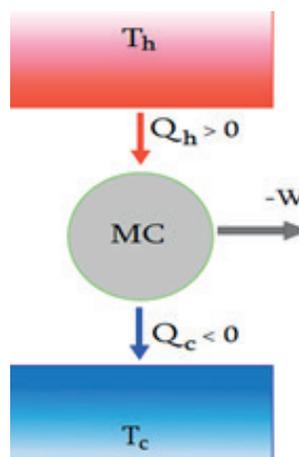


Figura 1. Operación de una máquina térmica

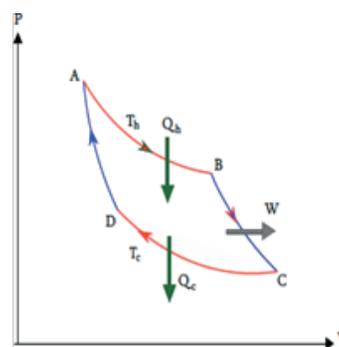


Figura 2. Ciclo de Carnot

Las ideas expuestas por Carnot en su trabajo, sirvieron de base para el desarrollo de toda la teoría moderna de las máquinas térmicas y por primera vez se pone de manifiesto la relación que existe entre calor y trabajo. También se establece que no pueden existir máquinas de movimiento perpetuo, es decir, *máquinas que trabajando en ciclos, cuya única finalidad sea convertir calor íntegramente en trabajo*, que por ende es una forma de enunciar la segunda ley de la termodinámica debido a Lord Kelvin y Max Planck (García-Colín, 1986, p. 90). El trabajo de Carnot fue ignorado por sus colegas franceses, sin embargo, fueron los científicos alemanes e ingleses quienes utilizaron el trabajo de Carnot, para impulsar el desarrollo de la teoría moderna del calor. Así, durante la tercera década del siglo XIX, las ideas de Carnot estaban listas en el escenario científico para el surgimiento de las leyes de la termodinámica.

Veamos cuáles son estas leyes y sus consecuencias. Por ejemplo, los experimentos realizados por el físico británico James Joule en 1843, fueron decisivos para demostrar de forma contundente la equivalencia entre el trabajo mecánico y el calor. Los resultados de Joule fueron la base para establecer la primera ley de la termodinámica, y posteriormente el principio de conservación de energía, a saber: cuando un sistema termodinámico intercambia energía con sus alrededores en forma de trabajo W y calor Q , entonces el cambio de su energía interna ΔU , debe cumplir que $\Delta U = U_f - U_i = W + Q$, donde U_f y U_i son la energía interna en el estado de equilibrio final e inicial del sistema, respectivamente. Por su parte, la segunda ley de la termodinámica se puede enunciar de otra forma distinta al

enunciado de Kelvin y Planck, es decir, mediante otro postulado debido a Rudolf Clausius, a saber: *Toda transformación cíclica cuya única finalidad sea transferir una cierta cantidad de calor de un cuerpo frío a uno caliente, es imposible*. Fue precisamente Clausius quien en su trabajo publicado en 1840, pudo mostrar de manera explícita que la eficiencia de una máquina de Carnot, depende únicamente de las temperaturas T_c y T_h de las fuentes fría y caliente respectivamente, entre las cuales opera la máquina de Carnot y no de los fuentes encargados de producir dichas temperaturas. Para poder calcular dicha eficiencia, Clausius supuso que la sustancia operante, en este caso el aire, se comporta como un gas ideal del cual ya se conocía su ecuación de estado (García-Colín, 1986, p. 84). La hipótesis más importante que Clausius tuvo que hacer fue, suponer que el proceso cíclico que realiza el gas ideal de la máquina de Carnot es un proceso ideal, esto es, un *proceso cuasiestático o sucesión de estados de equilibrio*, o lo que es lo mismo un *proceso reversible*, un proceso que puede realizarse en un sentido y en sentido opuesto del ciclo. En la figura 2, se muestra esquemáticamente un ciclo reversible de Carnot, representado por dos procesos isotérmicos a temperaturas T_h y T_c unidos por dos procesos adiabáticos (líneas en azul). Este ciclo se lleva a cabo muy lentamente por una sucesión de estados de equilibrio. El ciclo que realiza toda máquina térmica real siempre están presentes las pérdidas de energía por fricción.

Veamos ahora la forma en que Clausius obtiene la eficiencia de una máquina térmica de Carnot. Para ello adoptamos las siguientes convenciones: se considera que el calor y el trabajo absorbidos por el

sistema son positivos. Por lo tanto, toda máquina térmica que realiza un ciclo de Carnot, *transforma una cierta cantidad de calor Q_h absorbida de una fuente caliente a temperatura T_h , en una cantidad de trabajo $-W$, y la energía restante es evacuada en forma de calor $Q_c = -Q_h - W$ a una fuente fría de temperatura T_c* . La eficiencia η se define como el cociente entre la cantidad de trabajo producido y la cantidad de calor que se absorbe de la fuente caliente, esto es $\eta = -W/Q_h$, la cual también se demuestra que es igual $\eta = 1 + Q_c/Q_h$. Sin embargo, por ser la sustancia de trabajo un gas ideal y de acuerdo con la primera ley, se concluye que la eficiencia de una máquina térmica de Carnot $\eta_C = 1 - T_c/T_h$.

Este resultado es el que Carnot no pudo demostrar en su trabajo, sin embargo planteó la posibilidad de expresarla en términos de las temperaturas de los cuerpos entre los cuales opera la máquina, y no de los agentes que las producen. Debemos notar varios puntos importantes de los resultados anteriores. En primer lugar, la eficiencia definida en términos de los calores es completamente general, en tanto que la eficiencia de Carnot es únicamente para procesos reversibles. Se podría inferir casi de inmediato que la eficiencia de cualquier otra máquina térmica cuyo ciclo no sea reversible (debido a las pérdidas por fricción), debe ser menor que la de Carnot, y por tanto η_C es el máximo valor de la eficiencia de toda máquina térmica, es decir $\eta \leq \eta_C$ [García-Colín, 1986, p. 91]. También es claro que $\eta_C < 1$, puesto que $T_c < T_h$, luego entonces, no existe ninguna máquina térmica cien por ciento eficiente.

2. Máquinas térmicas a tiempo finito

Para abordar el tema sobre las máquinas térmicas brownianas, es necesario

hacer una breve introducción sobre las máquinas térmicas macroscópicas cuyas sustancias de trabajo pueden operar en ciclos en un tiempo finito, y que además el proceso cíclico se realiza *fuera de equilibrio*, es decir, un *proceso cíclico irreversible*. La termodinámica dedicada a este estudio se le conoce comúnmente como *termodinámica de tiempos finitos*. Recordemos que las ideas de Carnot también sirvieron de base para el desarrollo de la termodinámica, en este sentido el concepto de eficiencia de una máquina de Carnot desempeñó un papel fundamental. Sin embargo, las implicaciones prácticas de esta eficiencia están muy limitadas; puesto que para lograr un proceso cíclico reversible, uno necesita trabajar con ciclos infinitamente lentos, de manera tal que la potencia de salida es prácticamente nula, es decir, la potencia de salida $P = -W/t \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, contrario a lo ocurre con una máquina térmica real cuyo proceso cíclico no es reversible con una potencia de salida finita. En una máquina térmica reversible el intercambio de calor con sus fuentes se consideran instantáneas, mientras que en un proceso cíclico irreversible, la transferencia de calor ocurre en un tiempo finito. Al parecer, los primeros trabajos que fueron reportados en el contexto de la termodinámica de tiempos finitos, están los artículos de Chambadal (Chambadal, 1957) y Novikov (Novikov, 1958). Sin embargo, el trabajo de Curzon y Ahlborn (CA) (Curzon, 1975) con el título: *Eficiencia de una Máquina de Carnot a Máxima Potencia de Salida*, es el más citado en la literatura. CA consideraron una máquina de Carnot operando entre dos fuentes térmicas de temperaturas fría y caliente. El proceso cíclico irreversible, consiste de dos procesos isotérmicos de no equilibrio unidos

por dos procesos adiabáticos reversibles. Durante la expansión isotérmica a temperatura constante T_h , el flujo de calor entre la sustancia operante con la fuente caliente ocurre en un tiempo finito t_h , mientras que durante la compresión isotérmica, el flujo de calor con la fuente fría de temperatura T_c , ocurre en un tiempo t_c , de tal manera que el tiempo total del ciclo $t_{ciclo} = t_c + t_h$. Con la hipótesis de reversibilidad de los procesos adiabáticos CA establecieron una relación que les permitió obtener una expresión para la potencia de salida. Derivando la potencia con respecto a una variable apropiada e igualando a cero, fueron capaces de demostrar que la eficiencia óptima de una máquina de Carnot operando a máxima potencia entre dos fuentes térmicas a tiempo finito está dada por $\eta_{CA} = 1 - \sqrt{T_c/T_h}$, la cual evidentemente cumple que $\eta_{CA} \leq \eta_C$, de acuerdo con lo establecido por Carnot. Después de la publicación del trabajo de CA, un número importante de trabajos sobre el desempeño de dispositivos convertidores de energía (transferencia de calor en un tiempo finito), han sido reportados en la literatura (Angulo-Brown, 1990, Berry, 2000, Gonzalez-Ayala, 2013, Hoffman, 1997, etc.)

Llama la atención el interesante artículo publicado en 2010 en la revista *Physical Review Letters* por Esposito et al. con el título: *Eficiencia a Máxima Potencia de Máquinas de Carnot a baja-disipación* (Esposito, 2010). En dicho trabajo, los autores calcularon la eficiencia a máxima potencia de la máquina térmica de Carnot irreversible en condiciones de baja-disipación. La idea central del método es muy simple, consiste en suponer que los efectos de las irreversibilidades presentes en el ciclo de una máquina térmica real tipo Carnot, se

consideran no muy alejados del ciclo reversible de Carnot. En otras palabras, las perturbaciones alrededor del ciclo reversible son pequeñas. El método sólo considera los efectos irreversibles presentes sólo en los dos procesos isotérmicos, mientras que los procesos adiabáticos se asume que son instantáneos. Aunque esta hipótesis resulta un tanto cuanto cuestionable, la eficiencia obtenida con este método está de acuerdo con las eficiencias observadas de varias plantas de potencia térmica (Esposito, 2010). Luego entonces el punto de partida del método de baja-disipación, es una máquina de Carnot reversible, lo que significa que el sistema siempre permanece muy cercano al equilibrio y el tiempo del ciclo es muy grande. Si el proceso cíclico ya no es reversible sino irreversible a tiempo finito, entonces los procesos disipativos juegan un papel muy importante durante el ciclo. Los autores propusieron que si t_c y t_h son los tiempos durante los cuales el sistema está en contacto con la fuentes fría y caliente respectivamente, entonces la producción de entropía (variación de la entropía por unidad de tiempo) a lo largo de las isothermas fría y caliente, son inversamente proporcionales a sus respectivos tiempos, es decir Σ_c/t_c y Σ_h/t_h , donde los parámetros Σ_c y Σ_h dan información acerca de las irreversibilidades (procesos disipativos) presentes en cada isoterma.

Para el ciclo de Carnot reversible, se puede calcular el calor absorbido de la fuente caliente de temperatura T_h , así como el calor cedido a la fuente fría de temperatura T_c . Ambos calores se pueden obtener en función del cambio de entropía respectivo, de acuerdo con la definición del cambio de entropía definida por Clausius (García-Colín, 1986, p. 101). Tomando en cuenta que el cambio de entropía total del

sistema durante el ciclo es $\Delta S = \Delta S_c + \Delta S_h = 0$, es decir $\Delta S_c = -\Delta S_h \equiv \Delta S$, entonces los calores absorbidos y cedidos de manera reversible serán $Q_c^h = T_h \Delta S$ y $Q_c^c = -T_c \Delta S$. Así, la cantidad de calor que la máquina de Carnot intercambia con las fuentes fría y caliente durante el ciclo irreversible están dadas por $Q_c = T_c (-\Delta S - \Sigma_c/t_c)$ y $Q_h = T_h (\Delta S - \Sigma_h/t_h)$, respectivamente.

Igualando a cero la derivada de la potencia de salida $P = -W/(t_c + t_h)$, con respecto a los tiempos t_c y t_h los autores mostraron que la eficiencia óptima η^* a máxima potencia, se puede escribir en términos de la eficiencia de Carnot y de la razón Σ_c/Σ_h , de la siguiente manera

$$\eta^* = \frac{\eta_C (1 + \sqrt{T_c \Sigma_c / T_h \Sigma_h})}{(1 + \sqrt{T_c \Sigma_c / T_h \Sigma_h})^2 + (T_c/T_h)(1 - \Sigma_c/\Sigma_h)}$$

Es evidente que cuando $\Sigma_c = \Sigma_h$ la eficiencia a máxima potencia se reduce a la eficiencia de Curzon y Ahlborn, es decir, $\eta^* = \eta_{CA} = 1 - \sqrt{T_c/T_h}$. Éste es el caso de baja-disipación simétrica que se podría interpretar como la misma proporción de efectos irreversibles que se disipan en cada proceso isotérmico. Se puede verificar fácilmente que cuando $\Sigma_c/\Sigma_h \rightarrow 0$, entonces $\eta^* = \eta_C/(2 - \eta_C)$, y para $\Sigma_c/\Sigma_h \rightarrow \infty$, se tiene que $\eta^* = \eta_C/2$, los cuales corresponden a la cota superior e inferior de η^* , respectivamente. En la figura 3, se muestra el comportamiento de la eficiencia a máxima potencia como función de la eficiencia de Carnot. La línea en color negro es la cota máxima y la línea punteada en azul la cota mínima. La línea en color rojo la eficiencia de CA. Los puntos en color negro representan las eficiencias observadas de varias plantas de potencia térmica (PPT). Los puntos fuera de las cotas máxima y mínima, podrían representar a las PPT

que no operan a máxima potencia

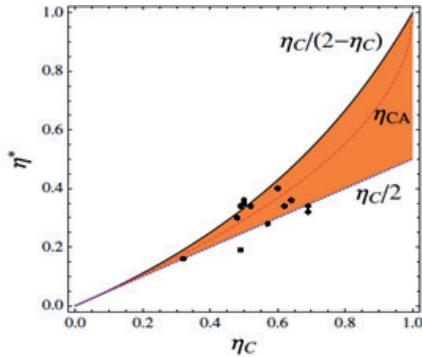


Figura 3. Eficiencia a máxima potencia como función de η_C .

3. Máquinas térmicas brownianas

La nanociencia, es una rama del conocimiento científico que permiten entender cómo funciona la naturaleza cuando es observada a pequeña escala, del orden de micras o nanómetros (1 micra=10⁻⁶ m, y un nanómetro, 1 nm=10⁻⁹ m). Con los avances sorprendentes de la micro-nano tecnología los científicos intentan vencer los retos para lograr construir nano máquinas artificiales, capaces de realizar múltiples tareas inaccesibles para las máquinas macroscópicas tales como, el transporte de carga dentro de las células o a lo largo de microcanales, aniquilando células de manera selectiva (Hänggi, 2009, Sánchez, 2015). También mediante pinzas ópticas, ya es posible atrapar, controlar y manipular biomoléculas, partículas coloidales, controlar el doblamiento y desdoblamiento de proteínas, construir microrobots con fines terapéuticos, etc. Una pinza óptica es un instrumento que usa un rayo láser para proveer una fuerza atractiva o repulsiva tipo oscilador armónico, para atrapar y manipular físicamente objetos microscópicos, véase la figura 4. Las pinzas ópticas han sido particularmente exitosas en el estudio de una varie-

dad considerable de sistemas biológicos. Fue Arthur Ashkin, un físico estadounidense el inventor de las pinzas ópticas en 1986, y galardonado con el premio Nobel de Física en 2018 por sus contribuciones en la física del láser (Ashkin, 1987).

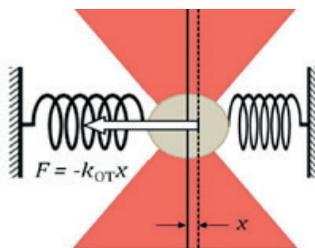


Figura 4. Trampa óptica tipo oscilador armónico

El principio del funcionamiento de los micro y nano motores artificiales, es la conversión de energía térmica o química en energía mecánica o trabajo (similar a las máquinas térmicas mencionadas en las secciones anteriores). La característica principal de estas nano máquinas es la presencia inevitable de las fluctuaciones de su entorno, cuyos órdenes de magnitud son comparables con el flujo de energía promedio producido por dichas máquinas; luego entonces la eficiencia de una máquina de tamaño pequeño depende fuertemente de las propiedades de sus alrededores.

Bajo estas condiciones, es inmediato preguntarse acerca de la construcción de máquinas térmicas brownianas mediante el uso de pinzas ópticas. Las partículas brownianas, son partículas del orden de micras inmersas en un fluido (líquido, gas, etc.) que realizan un movimiento continuo pero muy irregular en forma de zigzag, debido a las constantes colisiones que estas partículas experimentan con los átomos y/o moléculas del fluido. El interés radica entonces en la posibilidad de cons-

truir una máquina térmica browniana, también conocida como máquina estocástica (estocástica es una palabra en griego que significa aleatorio), que sea capaz de realizar ciclos tipo Carnot o cualquier otro mediante la conversión de energía térmica en trabajo útil. Debido a las fluctuaciones térmicas (fluctuaciones estocásticas) que experimenta la partícula browniana (PB), ésta se encuentra fuera de equilibrio, luego entonces para la construcción de dicha máquina son necesarias las técnicas de atrapamiento y manipulación mediante pinzas ópticas, para que la PB puede llevar a cabo cualquier tipo de proceso termodinámico. En este sentido, gracias a las técnicas de micro manipulación los científicos han podido construir diferentes tipos de motores y máquinas micrométricas (Valero, 2018). En 2016 fueron galardonados con el premio Nobel de química a los científicos, Jean-Pierre Sauvage (Francia), Sir J. Fraser Stoddart (Reino Unido) y Bernard L. Feringa (Holanda), por el diseño y síntesis de máquinas moleculares. Se trata de moléculas con movimientos controlables que pueden realizar una tarea cuando se les añade energía.

Por otra parte, hasta donde se sabe, la construcción de la primera máquina térmica estocástica tipo Stirling fue reportada por Blickle y Bechinger (Blickle, 2012), y la primera máquina estocástica tipo Carnot por I. Martínez y su equipo de trabajo (Martínez, 2015). Inmediatamente después I. Martínez y sus colegas (Martínez, 2016), diseñaron un modelo experimental de pinzas ópticas para atrapar y manipular a una partícula browniana, mediante el control externo de dos parámetros relacionados con el control de la rigidez de la trampa óptica y con el control de la temperatura del

fluido en la que se encuentra inmersa la PB. Estos parámetros son los potenciales externos V_k y V_q , como se muestra en la figura 5. Con la manipulación externa de dichos parámetros, se permite que la PB pueda llevar a cabo cualquier tipo de proceso termodinámico. La luz láser de cierta intensidad, genera el potencial óptico tipo oscilador armónico que permite atrapar a la partícula browniana. Una variación del voltaje V_k aplicado directamente al láser, induce una variación lineal en la rigidez de la trampa óptica, lo que a su vez controla el grado de confinamiento de la PB. El voltaje externo V_q es la responsable de controlar la intensidad del ruido que siente la PB, y que a su vez tiene que ver con el control de la temperatura del medio (agua) en la que está inmersa.

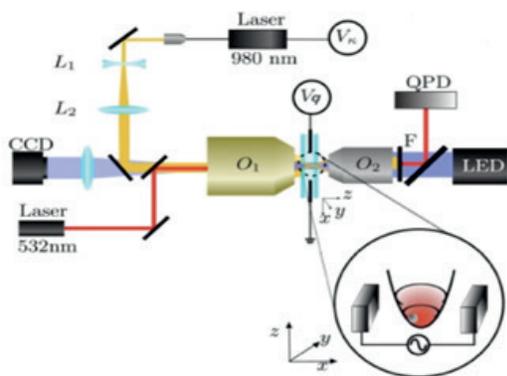


Figura 5. Diseño experimental de pinzas ópticas: V_k controla la rigidez del potencial óptico y V_q controla la temperatura del fluido en la que la PB está inmersa.

Por la naturaleza misma de las máquinas brownianas, nos preguntamos, ¿Hasta dónde es posible extender las leyes de la termodinámica al estudio de estos sistemas de tamaño pequeño? ¿Qué expresiones adoptan en este caso las leyes de la termodinámica? El interés creciente del estudio de estos sistemas ha dado lugar a lo que hoy se conoce como *termodinámica*

estocástica, iniciada por K. Sekimoto, en su libro *Energética estocástica* (Sekimoto, 2010). A partir de la definición de los conceptos termodinámicos como el calor, trabajo, entropía, potencia, etc; a lo largo de una trayectoria estocástica que describe una PB, la termodinámica estocástica pretende establecer leyes similares a las de la termodinámica convencional, luego entonces es un campo de investigación en desarrollo para la física, química, biología, medicina, ingeniería, etc. Existen en la literatura, dos métodos equivalentes para estudiar la energética de las máquinas estocásticas. Una es a través de la ecuación de Langevin y la otra mediante la ecuación de Fokker-Planck, siendo la ecuación de difusión de Einstein (Einstein, 1956) un caso particular. La ecuación que describe la dinámica de una PB inmersa en un fluido se conoce como ecuación de Langevin (Langevin, 1908) y fue formulada en el contexto de la segunda ley de Newton, $m\ddot{x} = -\gamma v + f(t)$, donde $-\gamma v$ es la fuerza de fricción de Stokes (fuerza determinista o sistemática) y $f(t)$ es una fuerza de naturaleza fluctuante dependiente del tiempo, también conocida como fuerza aleatoria o estocástica, o simplemente ruido.

Para concluir, quiero comentar en este último párrafo sobre un artículo reciente de investigación, relacionado con la eficiencia a máxima potencia de tres máquinas térmicas brownianas con el título: “*Máquinas térmicas de Carnot, Stirling y Ericsson: Eficiencia a máxima potencia*” (Contreras-Vergara, 2023). En este artículo se logra extender el método de baja-disipación discutido anteriormente en la Sec. 2, al estudio de las tres máquinas térmicas brownianas. Como se puede ver en dicha sección, este método es muy simple. Sólo se necesita construir las propiedades de equilibrio

de la máquina y después perturbar los calores absorbidos Q_h y cedidos Q_c por la sustancia de trabajo (en este caso la PB) alrededor del equilibrio para después calcular la eficiencia a máxima potencia para el correspondiente ciclo irreversible. En el caso macroscópico las cantidades de equilibrio se pueden calcular mediante la ecuación de estado de un gas ideal, mientras que en el caso browniano las propiedades de equilibrio se pueden obtener de una ecuación “tipo ecuación de estado”. Este tipo ecuación de estado está asociado con el promedio de $\langle x^2 \rangle_{eq}$ donde x es la posición de la PB, y que puede obtenerse de la ecuación de Langevin asociada a PB ligada a una trampa de potencial armónico $V(x) = k(t) x^2 / 2$, siendo $k(t)$ la rigidez de la trampa que depende del tiempo. La ecuación de Langevin en este caso será ahora $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - k(t)x + f(t)$. Esta ecuación no se puede resolver explícitamente pero puede obtenerse sus propiedades estadísticas, a través de las propiedades estadísticas del ruido. Sin entrar en los detalles técnicos, se puede mostrar que a partir de esta ecuación de Langevin (Contreras-Vergara, 2023), el valor promedio $\langle x^2 \rangle_{eq} = k_B T / k$, siendo k_B la constante de Boltzmann y T la temperatura del fluido. Esta ecuación es muy parecida a la ecuación de estado del gas ideal en termodinámica, es decir, $p \sim T / V$, donde p es la presión y V el volumen. En la figura 6 se muestra esquemáticamente el ciclo de Carnot reversible, representada por dos isothermas (trayectorias en color rojo y azul) y dos adiabáticas (trayectorias en color verde y negro). El ciclo irreversible se realiza con la manipulación de la trampa armónica en cada proceso. Los resultados obtenidos en (Contreras-Vergara, 2023), son muy similares a los reportados por Esposito et al, para la máquina de Carnot. Es importante destacar que, similar al caso macroscópico,

también en condiciones de baja-disipación simétrica, la eficiencia óptima a máxima potencia es la misma que la de Curzon y Ahlborn, es decir $\eta_{CA} = 1 - \sqrt{T_c/T_h}$, que ya ha sido obtenida en otros trabajos relacionados con máquinas brownianas por otros métodos de solución (Plata, 2020, Shmiedlt, 2008, Zamudio, 2019).

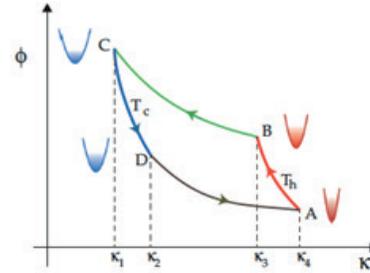


Figura 6. Diagrama del ciclo tipo Carnot de una PB. (i) A-B expansión isotérmica, (ii) B-C expansión adiabática, (iii) C-D compresión isotérmica, (iv) D-A compresión adiabática

En conclusión, debemos destacar que los científicos continúan desarrollando las bases científicas para dar sustento teórico a la construcción de máquinas microscópicas, así como a la manipulación mediante pinzas ópticas, de átomos, moléculas, células vivas y demás, para fines terapéuticos. En este contexto, la termoninámica estocástica juega un papel fundamental y sin duda alguna, ofrece un campo fructífero de investigación.

Referencias

- Angulo Brown, F., y Ramos Madrigal, G., Sobre ciclos politrópicos a tiempo finito, *Rev. Mex. Fis.* 36 [3], pp.363-375, 1990.
- Ashkin, A., Dziedzic, J. M., Yamane, T., Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams, *Nature (London)* 330, pp.769-771, 1987.

- Berry, R. S., Kazakov, V. A., Sieniutycz, S., Szwast, Z., Tsvilin, A. M., *Thermodynamic Optimization of Finite-Time Processes*, Wiley, Chichester, 2000.
- Blickle, V., y Bechinger, C., Realization of a micrometre-sized stochastic heat engine, *Nat. Phys.* 8, pp.143-146, 2012.
- Carnot, N. L. S., *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, Paris Collection des travaux, 1824, y la traducción al inglés de E. Mendoza, Dover Publications In. N. Y. 1960.
- Curzon, F. y Ahlborn, B., Efficiency of a Carnot Engine at Maximum Power Output, *Am. J. Phys.* 43, pp. 22-24, 1975.
- Contreras-Vergara O., Sánchez-Salas, N., Valencia-Ortega, G., Jiménez-Aquino, J. I., Carnot, Stirling, and Ericsson stochastic heat engines: Efficiency at maximum power, *Phys. Rev. E*, 108, 014123, pp.1-10, 2023.
- Chambadal, P. *Les Centrales Nucleaires*, Armand Colin, Paris, 1957, pp. 41-58.
- Einstein. A., *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*, Dover Publications, US, New York, 1956, pp. 1-18.
- Esposito, M., Kawai, R., Lindenberg, K., Van de Broeck, C., Efficiency at Maximum Power of Low-Dissipation Carnot Engines, *Phys. Rev. Lett.* 105, 150603, pp.1-4, 2010.
- García-Colín Scherer, L., *De la máquina de vapor al cero absoluto (calor y entropía)*, La ciencia desde México Fondo de Cultura Económica, 1986, pp.7-147.
- García-Colín Scherer, L., *Introducción a la termodinámica clásica*, 3a. edición, Editorial Trillas, 1986, pp.13-335.
- Gonzalez-Ayala J., Arias-Hernandez L. A., Angulo-Brown F., Connection between maximum-work and maximum-power thermal cycles, *Phys. Rev. E* 88, 052142 pp.1-7, 2013.
- Hoffmann, K. H., Burzler, J., Schubert, S., Endoreversible Thermodynamics, *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 22, pp. 311-355, 1997.
- Hänggi, P. y Marchesoni, F., Artificial Brownian motors: Controlling transport on the nanoscale, *Rev. Mod. Phys.* 81 [1], pp. 387-442, 2009.
- Langevin, P., Sur la théorie du mouvement Brownien, *C. R. Acad. Sci.* 146, pp. 530–533, 1908.
- Martínez, I. A., Roldán, É., Dinis, L., Petrov, D., Rica, R. A., Adiabatic Processes Realized with a Trapped Brownian Particle, *Phys. Rev. Lett.* 114, 120601, pp.1-6, 2015.
- Martínez, I. A., Roldán, É., Dinis, L., Petrov, D., Parrondo, J. M., Rica, R. A., Brownian Carnot engine, *Nat. Phys.* 12, pp.67-72, 2016.
- Novikov, I. I., Efficiency of an atomic power generating installation, *Sov. At. Energy*, 3 [11], pp.1269-1272, 1957.
- Plata, C. A. Guéry-Odelin, D., Trizac, E., Prados, A. Building an irreversible Carnot-like heat engine with an overdamped harmonic oscillator, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* 093207, pp.2-18, 2020.
- Sanchez, S., Soler L., Katuri, J., Chemically Powered Micro- and Nanomotors, *Angew. Chem. Int. Ed.* 52, pp. 2-33, (2014).
- Sekimoto, K., *Stochastic Energetics*, Vol.

799 Springer, Heidelberg, Germany, 2010, pp.3-322.

Schmiedl, T., y Seifert, U., Efficiency at maximum power: An analytically solvable model for stochastic heat engines, *Europhys. Lett.* 81, 20003, pp.1-6, 2008.

Valero, J., Pal, N., Dhakai, S., Walter, N. G., Famulok, M., A bio-hybrid DNA ro-

tor-stator nanoengine that moves along predefined tracks, *Nat. Nanotechnol.* 13, pp. 496 -503, 2018.

Zamudio Murillo, A. E., *Ciclo de Stirling para una partícula browniana*, pp.1-121, (2019). Tesis de Maestría en Ciencias (Física), Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. Disponible en la biblioteca digital de la UAM-Iztapalapa.