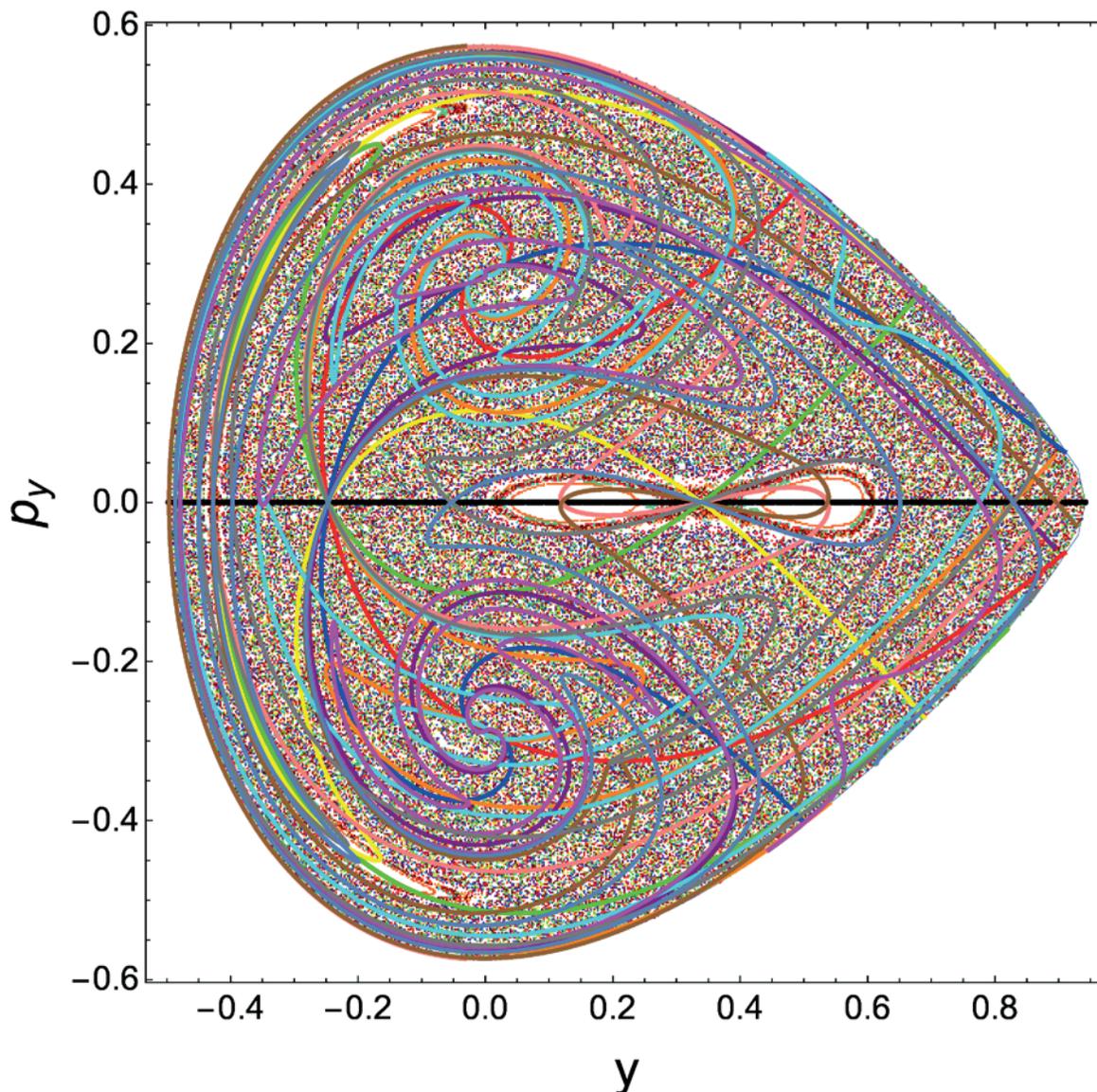


# Orbitas Periódicas y el Caos Hamiltoniano



*Paini Miguel Juárez Flores*  
*Lidia Jiménez Lara*  
*Departamento de Física,*  
*Universidad Autónoma Metropolitana*  
*Unidad Iztapalapa*  
*Mario Alan Quiroz Juárez*  
*Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada,*  
*Universidad Nacional Autónoma de México*



## Resumen

Abordamos el método de líneas de simetría que permite encontrar órbitas periódicas en sistemas Hamiltonianos tanto integrables como no integrables. Los sistemas no integrables tienen frecuentemente soluciones caóticas. Las órbitas periódicas actúan como estructuras de referencia alrededor de las cuales se organiza la dinámica del sistema. Usualmente se entienden como antónimos la periodicidad y el caos, pero aquí veremos con un ejemplo cómo coexisten las órbitas periódicas, cuasi-periódicas y caóticas en los sistemas Hamiltonianos autónomos no lineales, lo que nos permite ilustrar la complejidad y riqueza de estos sistemas y su estructura del espacio fase.

**Palabras Clave:** Órbitas Periódicas; Caos Hamiltoniano; Sistemas no integrables; Líneas de Simetría.

## Abstract

In this discussion, we explore the method of symmetry lines to identify periodic orbits in both integrable and non-integrable Hamiltonian systems. The primary focus is on non-integrable systems, which often exhibit chaotic behavior. These periodic orbits serve as reference structures around which the system's dynamics are organized. While periodicity and chaos are usually seen as opposites, we demonstrate through examples how periodic, quasi-periodic, and chaotic orbits coexist in autonomous nonlinear Hamiltonian systems. This coexistence illustrates the complexity and richness of these systems, as well as the intricate structure of their phase space.

**Keywords:** Periodic Orbits; Hamiltonian Chaos; Non integrable systems; Symmetry Lines.

## Introducción

Las órbitas periódicas, cuasi-periódicas y el caos parecen definirse como antónimos en casi todos los contextos, pero veremos en este trabajo que no es así. Tratándose de sistemas dinámicos, el caos se caracteriza por una alta sensibilidad a las condiciones iniciales, es decir, dos trayectorias vecinas tienden a divergir a medida que el sistema evoluciona en forma determinista. Esta propiedad es común en sistemas Hamiltonianos no integrables. A diferencia de esto, la periodicidad es una propiedad en la cual el sistema evoluciona de tal manera que, después de un tiempo finito, retorna a un estado idéntico al estado inicial. Pero ¿qué entendemos por sistemas no integrables?

Para responder a esta pregunta vamos a centrarnos en una clase muy especial de sistemas dinámicos, los sistemas Hamiltonianos autónomos (aquellos que no dependen explícitamente del tiempo), que constituyen un formalismo matemático para describir la evolución de un sistema físico, similar a como lo hacen las leyes de Newton pero con mejores propiedades geométricas reflejadas en las ecuaciones de Hamilton. Un sistema Hamiltoniano y su evolución se define en un espacio abstracto llamado *espacio fase*, donde cada punto representa un *estado del sistema*, definido por sus variables dinámicas de *coordenadas y momentos canónicos*. La dimensión de este espacio es el doble ( $2n$ ) del número de *grados de libertad* ( $n$ ), que corresponde al número de coordenadas necesarias y suficientes para definir la configuración del sistema físico Hamiltoniano (espacio de configuración).

Las curvas solución ( $q(t), p(t)$ ) de las ecuaciones de Hamilton contienen la informa-

ción del estado del sistema en función del tiempo. Esta dinámica en el espacio fase de  $2n$  dimensiones es difícil de visualizar. Afortunadamente tenemos el concepto de constantes de movimiento o primeras integrales, que son funciones matemáticas de las  $2n$  coordenadas del espacio fase que se mantienen invariantes a lo largo de la evolución del sistema, como mostró Noether en 1918. Las constantes de movimiento resultan de las simetrías del sistema en cuestión. Por ejemplo, la invariancia de la dinámica Hamiltoniana bajo la traslación en el tiempo que tiene lugar en los Hamiltonianos autónomos, llamada *homogeneidad del tiempo*, tiene asociada la conservación de la energía<sup>1</sup> (Hand, 1998; Arnold, 2006). Cada constante de movimiento restringe la dinámica del punto fase en una dimensión (Arnold, 2006; Jiménez, 2016), y contar con ellas nos facilita encontrar la solución del sistema (por ello también se llaman integrales primeras).

Decimos que un sistema Hamiltoniano con  $n$  grados de libertad es integrable si existen  $n$  constantes de movimiento  $C_1, \dots, C_n$  independientes<sup>2</sup> y en involución<sup>3</sup>. Como  $H$  es una de esas constantes, podemos escribir  $C_1 = H$ .

Si un sistema no tiene al menos el mismo número  $n$  de constantes de movimiento que de grados de libertad, no va a ser posible hallar funciones matemáticas conocidas para determinar el estado futuro de las coordenadas del espacio fase. Esto es lo que se conoce como un **sistema no integrable**, que por su estructura compleja

en cuanto a su evolución en el espacio fase, genéricamente presenta caos. Una característica de los sistemas no integrables es que pueden coexistir soluciones periódicas y caóticas. Encontrar órbitas periódicas puede ser una tarea difícil, pero veremos en este trabajo cómo las simetrías discretas o de reflexión nos permiten calcularlas con relativa facilidad en sistemas de 2 grados de libertad. Veremos aquí cómo calcular las *líneas de simetría*, cuyas intersecciones son condiciones iniciales de soluciones periódicas.

### Mapeos de Poincaré

En este trabajo vamos a mostrar cómo calcular las órbitas periódicas utilizando un sistema Hamiltoniano de dos grados de libertad

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)$$

cuya dinámica está determinada por las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, \\ \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{dp_y}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned}$$

Al no tener  $H$  dependencia explícita en el tiempo,  $H$  es una constante de movimiento, es la conservación de la energía.

El potencial que utilizaremos para ejemplificar este método es el célebre potencial de Hénon-Heiles (Henon, 1964; Contopoulos,

<sup>1</sup> En realidad la cantidad que se conserva es  $H$  misma, que en la gran mayoría de los casos es la energía.

<sup>2</sup> Dos funciones  $F$  y  $G$  son independientes en el espacio fase si sus vectores gradientes son independientes en el espacio fase, excepto en un conjunto de medida cero.

<sup>3</sup> En involución significa que su paréntesis de Poisson  $[C_i, C_j] = 0$  para toda  $i, j = 1, \dots, n$ .

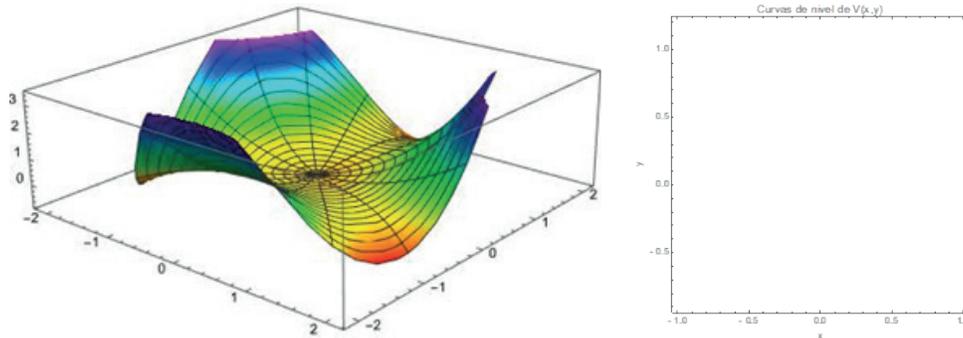


Figura 1: Gráfico de Potencial  $V(x, y)$ . Cerca del origen es prácticamente un oscilador armónico, pero cuanto más nos alejamos aumentando la energía, cada vez son más importantes los términos cúbicos no lineales.

los, 1966) que rompe la simetría asociada a rotaciones

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{y^3}{3}.$$

Este sistema surgió históricamente cuando los astrónomos Michel Hénon y Carl Heiles querían estudiar la dinámica de una estrella en un potencial gravitacional promediado producido por una galaxia con simetría axial. Ellos realizaron un estudio numérico en busca de una constante de movimiento extra a la energía, pues era dudoso que existiera, ya que tener evidencia de su existencia, o mejor aún encontrarla, implicaría la integrabilidad del sistema y la existencia de su solución analítica.

Cerca del punto de equilibrio  $(x, y) = (0, 0)$ , el potencial  $V(x, y)$  de Hénon-Heiles se reduce al oscilador armónico isotrópico en dos dimensiones, lo que indica que en el espacio fase cerca del origen (energías muy pequeñas) tenemos soluciones oscilatorias parecidas a las del oscilador armónico, véase la Figura 1.

Este sistema de dos grados de libertad, y por tanto el espacio fase de dimensión cua-

tro, tiene la constante de movimiento de energía, que es el valor del Hamiltoniano que permanece constante  $H(x, y, p_x, p_y)$ . Las simetrías espacio-temporales tradicionalmente conocidas son energía, momento lineal y momento angular, pero dado que ni el momento lineal ni el angular se conservan, no es claro que exista una constante de movimiento además de la energía. Hénon y Heiles se interesaron en buscar evidencia numérica sobre la existencia o no de una segunda constante de movimiento.

La existencia de la constante de energía restringe la dinámica a una superficie 3-D dentro del espacio fase, pero aún es complicado visualizar las soluciones en 3-D. Poincaré ideó una ingeniosa e interesante técnica que simplifica el estudio y visualización de la dinámica a mapas discretos del plano en el plano; él propuso tomar un corte de la superficie de energía 3-D donde ocurre el movimiento, con un plano 2-D fijo llamado *superficie de sección o de Poincaré*, tal que todas las soluciones crucen transversalmente ese plano; esto define un *mapeo* que genera un nuevo punto cada vez que la solución lo cruce. El mapeo así definido reduce la visualización de la dinámica continua 3-D sobre la su-

perficie de energía del sistema dinámico, a una discreta en el plano transversal al flujo. A este método se le conoce como *mapeos de Poincaré*.

Más específicamente, el mapeo de Poincaré discreto se obtiene integrando numéricamente las ecuaciones de movimiento de Hamilton para una condición inicial sobre la superficie de sección y graficando las intersecciones sucesivas con la sección transversal, repitiendo este proceso con diferentes condiciones iniciales; la evolución de cada condición inicial la graficaremos de un solo color para distinguir los puntos que pertenecen a la misma solución o condición inicial. En estos cálculos utilizamos el plano  $x=0$ . Cuando el punto vuelve a cruzar el plano, obtenemos un mapeo sobre la superficie, y así sucesivamente, generando un conjunto de puntos discretos que conforman el mapeo. Este nos ayuda a comprender la dinámica del sistema Hamiltoniano en el espacio fase sobre la superficie de energía, pues estamos graficando los cortes de las soluciones. Si todas las soluciones caen sobre curvas suaves, será un indicio de que hay una constante de movimiento extra (la intersección de su conjunto de nivel con el de la energía). Pero si al menos una solución ocupa una región 2-D en la sección transversal (ver Figura 2), será un indicio de que no existe otra constante de movimiento en esa región de la superficie de energía. Como las integrales de movimiento deben ser globales, si hay una región, por pequeña que sea, donde una condición inicial evolucione ocupando una región con área positiva, no podrá existir la segunda constante de movimiento buscada y el sistema debe ser no integrable. Estas trayectorias solución deben ocupar una región de volumen positivo en la superficie de energía constante.

En la Figura 2 mostramos el mapeo de Poincaré con un valor de  $E=0.1649$  ¡para una sola condición inicial! no puede haber una segunda integral de movimiento global (la primera es la energía), pues las soluciones caerían sobre curvas suaves (la intersección de las dos constantes si las hubiera). Esto se debe a la *ruptura de la simetría rotacional* del potencial no-lineal de Hénon-Heiles. Esta solución muestra un comportamiento muy complejo que lo identificamos con *caos*, “desparramándose” en una región muy amplia de la superficie de energía ya que no existe la segunda constante de movimiento.

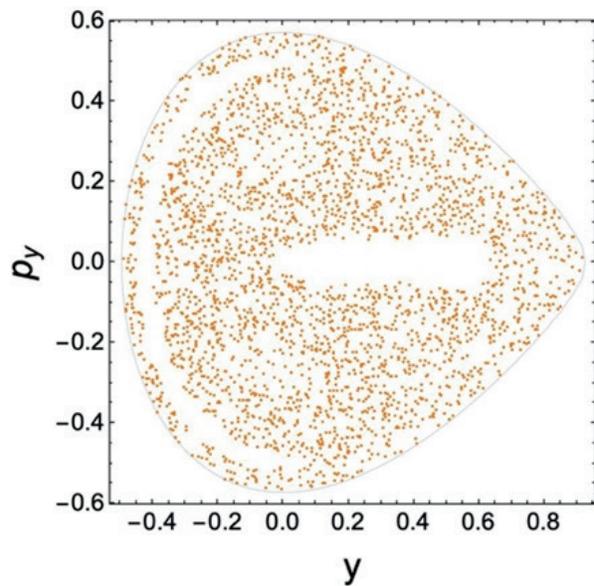


Figura 2: Mapeo de Poincaré en  $x=0$  para una sola condición inicial, con  $E=0.1649$ .

En la Figura 3 mostramos tres mapeos de Poincaré. En un valor pequeño de la energía ( $E=0.0016$ ), vemos que las soluciones son muy regulares, sugiriendo que probablemente existe una constante de movimiento extra. Un estudio más profundo muestra que no es así.

Lo que ocurre en general se ve en el segundo mapeo de Poincaré: la solución es una

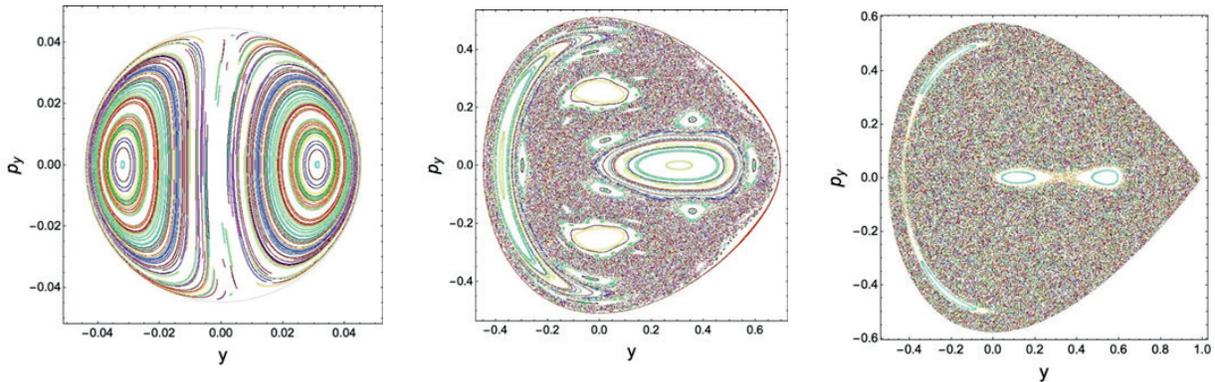


Figura 3: Mapeos de Poincaré en  $x=0$  para el sistema de Hénon-Heiles con  $E=0.0016$ ,  $E=0.125$  y  $E=0.1666$ . Se integraron 80 condiciones iniciales aleatorias dentro de la región de Poincaré permitida por la ecuación de la energía.

mezcla de los dos tipos de comportamiento, y es no integrable. Que en el primer mapeo no se vean las soluciones complejas con caos (el “mar” de puntos) es porque ocupan un volumen insignificante en el espacio fase, o equivalentemente, un área insignificante en el plano de Poincaré.

De esta forma, los mapeos de Poincaré nos revelan información sobre la dinámica del sistema y la estructura del espacio fase: la existencia de órbitas caóticas, en las cuales una sola condición inicial puede visitar regiones de volumen positivo de la superficie de energía constante sin un orden aparente (Tabor, 1989; Reichl, 1992; Lichtenberg, 1992). También hay soluciones *cuasi-periódicas*, que son las soluciones sobre curvas suaves, como se ve en las dos primeras gráficas de la Figura 3; note que las soluciones caóticas y cuasi-periódicas coexisten, y que al aumentar la energía y por tanto hacer que los términos no lineales predominen, las órbitas cuasi-periódicas van desapareciendo y conformando una región cada vez más pequeña de la región de Poincaré permitida. Si bien estos experimentos numéricos nos dan mucha información, no son una demostración matemática de la no integrabilidad.

### Líneas de Simetría y Órbitas Periódicas

Pero ¿qué hay de las órbitas periódicas? Estas órbitas son una cadena de puntos que regresan al punto inicial después de  $n$  iteraciones en las superficies de sección. A  $n$  se le llama el periodo de la órbita periódica discreta.

Las órbitas periódicas pueden ser estables o inestables. Las estables son los centros de las *islas* del mapeo de Poincaré y las inestables están en el mar de puntos caóticos (Tabor, 1987). Desde luego, la cantidad de condiciones iniciales que se pueden elegir para hacer un mapeo de Poincaré es infinita y la mayoría de estas corresponden a órbitas ya sea cuasi-periódicas o caóticas, por lo que lograr encontrar una condición inicial periódica, que en número representan una cantidad completamente insignificante (de medida cero) comparada con las otras dos, es prácticamente imposible sin una guía. Una forma de poder encontrarlas ha sido estudiada por Piña y Jiménez (Piña, 1987) a partir de las simetrías discretas del sistema: se construyen las líneas de simetría, y sus intersecciones son órbitas periódicas. La demostración

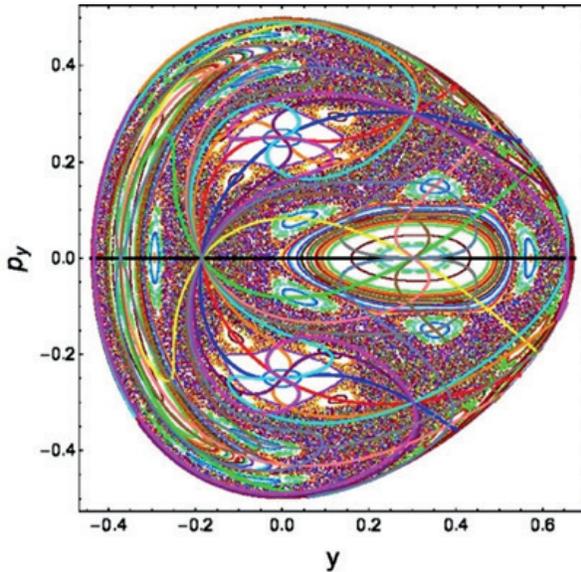


Figura 4: Líneas de simetría en la sección de Poincaré para el sistema de Hénon-Heiles. Las órbitas periódicas son las intersecciones de las líneas de simetría. Las intersecciones que están en el centro de las islas son estables (parecen los centros de las “flores”), y las inestables son las intersecciones que se encuentran en el mar caótico.

de lo que explicamos en esta sección se puede consultar esa referencia.

El sistema de Henon-Heiles tiene la simetría de reflexión con respecto al eje  $y$ , es decir el eje  $p_y=0$ , como puede verse en los mapeos de Poincaré. Este eje de simetría del sistema es la *línea fundamental de simetría* y la denotamos por  $\Gamma_0$ . Hay otra línea de simetría fundamental,  $\Gamma_1$ , que se obtiene “trayendo” (mediante integración numérica) hasta la sección transversal a todos los puntos que inician con velocidad cero en el espacio fase, llamada la *curva de velocidad cero*. Estos puntos tienen la particularidad de ser soluciones que se regresan sobre sí mismas: cuando se detienen y su energía cinética se anula, así que la energía potencial es la energía total. La curva de velocidad cero es la superficie equipotencial  $V(x, y$

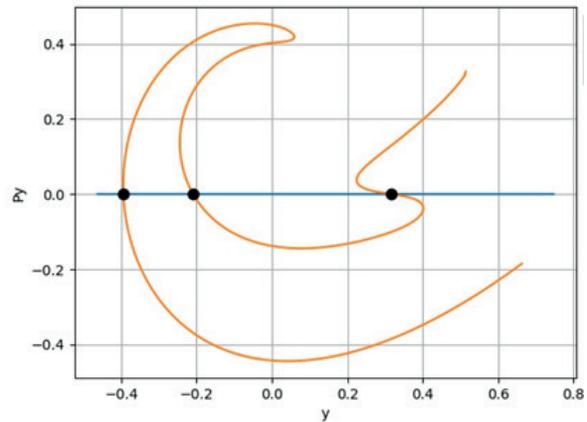


Figura 5: Intersección de la línea fundamental (horizontal en azul)  $\Gamma_0$  con la línea  $\Gamma_4$  (naranja), obteniendo órbitas de periodo 4, 2 o 1.

) =  $E$  y se puede graficar en el espacio de configuraciones  $(x, y)$ .

Se llaman líneas fundamentales porque generan a todas las líneas de simetría del sistema: la línea  $\Gamma_0$  genera a todas las líneas pares  $\Gamma_{2j}$  mapeando  $j$  veces a  $\Gamma_0$ , mientras que  $\Gamma_1$  genera a todas las líneas impares  $\Gamma_{2j+1}$  mapeando  $j$  veces a  $\Gamma_1$  (Piña, 1987). Para calcular numéricamente las líneas de simetría dividimos la línea horizontal en 10000 puntos y le aplicamos el mapeo de Poincaré  $T$  una vez, para obtener  $\Gamma_2=T\Gamma_0$  y mapeando ésta nuevamente  $\Gamma_4=T\Gamma_2$  se obtiene  $\Gamma_4$ , y así sucesivamente. Análogamente se obtienen  $\Gamma_3$  y las líneas impares a partir de  $\Gamma_1$ .

La propiedad importante de estas líneas de simetría es que al interseccionarlas obtenemos las coordenadas de las condiciones iniciales de las órbitas periódicas. Específicamente, **los cruces de las líneas  $\Gamma_j$  y  $\Gamma_k$  son órbitas periódicas simétricas de periodo  $|j-k|$  o un divisor** (Piña, 1987). Finalmente, las líneas de índice negativo son simplemente la reflexión sobre el eje  $p_y=0$  de las de índice positivo. La Figura 5 nos muestra

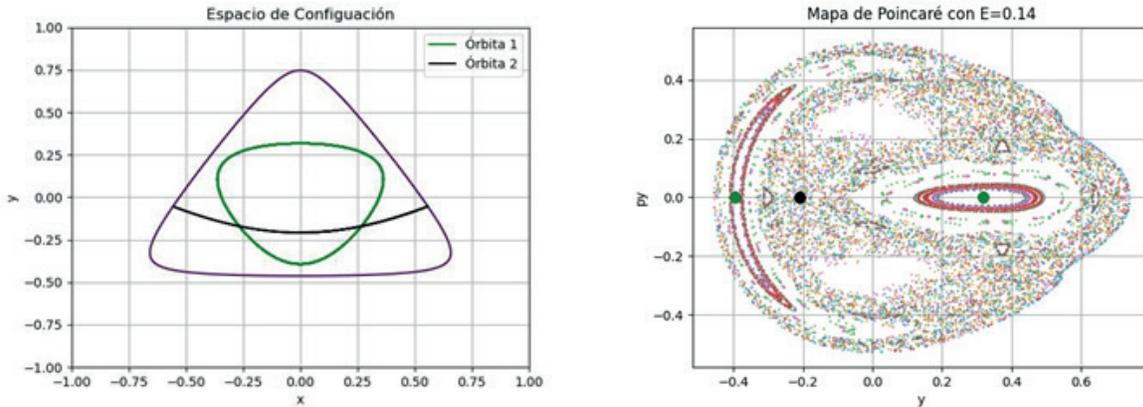


Figura 6: Soluciones periódicas en el espacio de configuración para las condiciones iniciales de periodo 2 de la Figura 5. La línea morada es la curva de velocidad cero.

la intersección de dos líneas  $\Gamma_0 \cap \Gamma_4$  que se cruzan en 3 puntos, lo que da lugar a 3 órbitas periódicas de periodo 4, 2 o 1. Si las graficamos en el espacio de configuración, son las órbitas periódicas mostradas en la Figura 6 izquierda. El mapeo de Poincaré se muestra a la derecha, las condiciones iniciales de las órbitas periódicas se muestran con dos puntos verdes y uno negro.

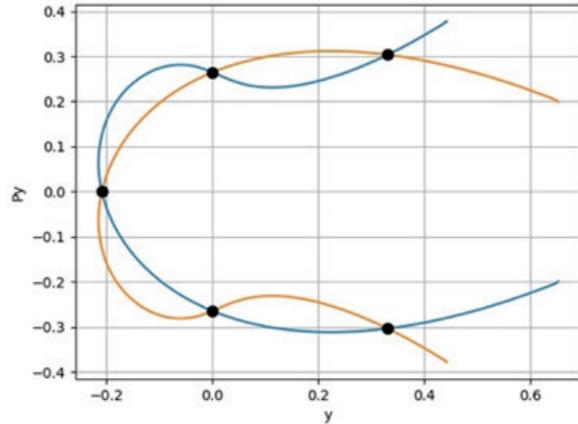


Figura 7: Intersección de líneas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_{-1}$  obteniendo órbitas de periodo 2.

Como es de esperarse las soluciones en el espacio de configuración son cerradas por ser periódicas. Después de cierto tiempo

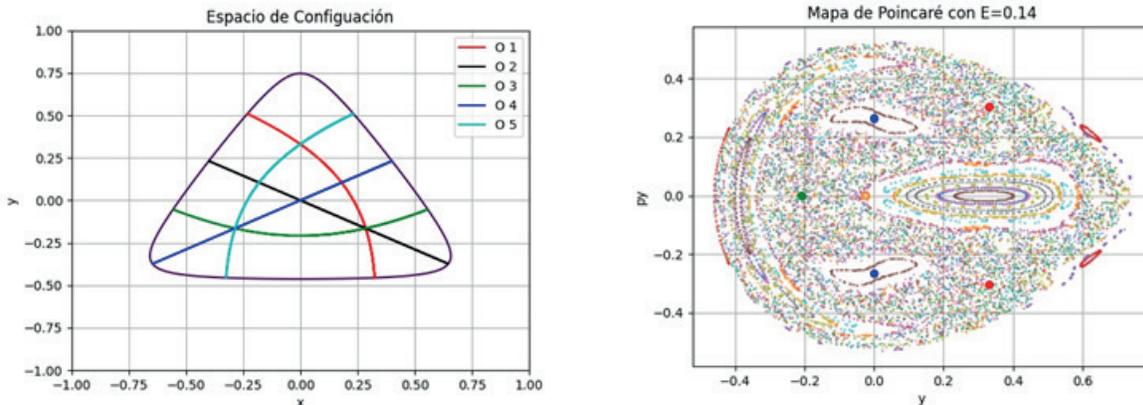


Figura 8: Izquierda: Soluciones en el espacio de configuración para las órbitas periódicas de periodo 2 de la Figura 7. Todas ellas tocan la curva de velocidad cero (se detienen) en 2 puntos y regresan sobre sí mismas. Derecha: mapeo de Poincaré y las condiciones iniciales de las órbitas periódicas (marcadas con puntos).

regresan a su condición inicial y vuelven a trazar la misma trayectoria. En la sección transversal son un conjunto finito de puntos, ver Figura 6 y 8.

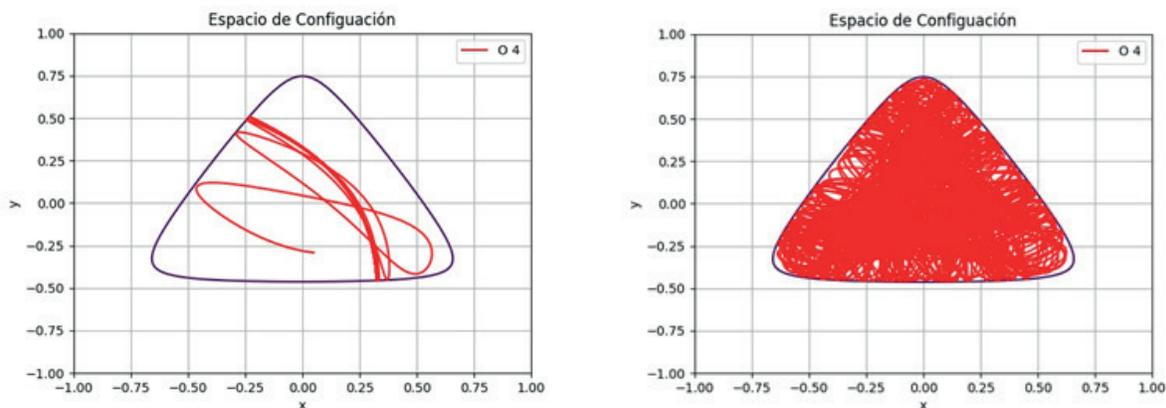
En la Figura 7 mostramos las líneas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_{-1}$  y sus intersecciones. Son 5 órbitas periódicas de periodo 2. Sus trayectorias en el espacio de configuración  $(x, y)$  así como los mapeos de Poincaré se muestran en la Figura 8.

La importancia de las órbitas periódicas es que determinan el tipo de movimiento en su cercanía: las estables o elípticas tienen soluciones de tipo oscilatorio y están rodeadas de islas en el mapeo de Poincaré. Alrededor de las soluciones periódicas elípticas hay soluciones cuasi-periódicas; de hecho, la estructura cualitativa del espacio fase con órbitas periódicas, islas y mar de puntos caóticos, se repite alrededor de las órbitas periódicas elípticas. Las órbitas periódicas inestables son de tipo hiperbólico y son el origen del comportamiento caótico del mar de puntos (Tabor, 1989; Jiménez, 2016).

Al obtener resultados de forma numérica, la precisión de las coordenadas de las órbitas

periódicas no es infinita. Si la órbita periódica es estable, este error numérico es irrelevante, y la solución se mantiene siempre cerca de la órbita periódica. En cambio, si la órbita periódica es inestable y se encuentra en el mar de puntos caóticos, se separa rápidamente de la periodicidad. Para mostrar esto, tomamos como ejemplo la órbita en rojo de la Figura 7. Esta órbita es inestable y encuentra dentro del mar de puntos caóticos, por lo que una ligera variación, o en este caso falta de precisión numérica, nos separa rápidamente (de hecho exponencialmente) de la solución periódica. En la Figura 9 mostramos este comportamiento: graficamos en el espacio de configuración la evolución de una condición inicial periódica obtenida mediante la intersección de las líneas de simetría para tiempos cortos (izquierda) y para tiempos grandes (derecha).

La órbita periódica inestable evoluciona abarcando gran parte del espacio de configuración, debido a que el error numérico de la órbita periódica inestable se magnifica exponencialmente, aunque inicialmente se encuentre muy cerca de la órbita periódica calculada. El exponente de la divergencia exponencial de dos trayectorias



*Figura 9: Solución en el espacio de configuración con tiempos de evolución cortos y grandes. Por ser una órbita inestable, cualquier error numérico hace que la solución se separe exponencialmente de la órbita periódica.*

muy cercanas es el *exponente de Lyapunov*, y es una medida del caos en esa región caótica. En las regiones regulares de movimiento, el exponente de Lyapunov es cero (Arnold, 2006).

Aunque los sistemas no integrables carecen de un conjunto completo de constantes de movimiento, lo que a menudo conduce al caos, también suelen tener órbitas periódicas y cuasi-periódicas. La coexistencia de órbitas periódicas, cuasi-periódicas y caos en sistemas no integrables ilustra la complejidad y riqueza de los sistemas dinámicos no lineales. La no integrabilidad no implica la ausencia total de orden. Las órbitas periódicas son esenciales para comprender la dinámica del sistema, ya que pueden actuar como estructuras de referencia alrededor de las cuales se organiza el comportamiento regular y el caótico. Esta dualidad resalta que, incluso en sistemas dominados por el caos, el orden y la previsibilidad pueden surgir en ciertas condiciones. Este fenómeno es fundamental en diversas áreas de la física, astronomía, ingeniería y otras ciencias, donde entender las dinámicas caóticas y periódicas es crucial para modelar y predecir el comportamiento de sistemas complejos no lineales.

### Referencias

- [1] Arnold, V., Kozlov, V., & Neishtadt, A., *Dynamical Systems III: Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, 3rd ed., *Encyclopedia of Mathematical Science*, Springer, 2006.
- [2] Contopoulos, G., *Recent developments in stellar dynamics, The theory of orbits in the solar system and in stellar systems*, vol. 25, pp. 3-18, 1966.
- [3] Hand, L., & Finch, J., *Analytical Mechanics*, Cambridge University Press, 1998.
- [4] Henon, M. y Heiles, C., *The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments*, *Astron. J.*, pp. 69–73, 1964.
- [5] Jiménez, L., & Escalona, B., Capítulo 7: La complejidad en los sistemas Hamiltonianos que Poincaré descubrió, *Henri Poincaré y David Hilbert y los fundamentos de la física matemática moderna*, UAM Iztapalapa, pp. 143-175, 2016.
- [6] Korsch, J., Jodl, H., & Hartmann, T., *Chaos*, Springer, 2008.
- [7] Lichtenberg, A., & Leiberman, M., *Regular and Chaotic Dynamics*, *Applied Mathematical Sciences*, 38, Springer, 1992.
- [8] Piña, E. y Jiménez-Lara, L., On the symmetry lines of the standard mapping, *Physica D*, 26[1], pp. 369–378, 1987.
- [9] Reichl, L., *The Transition to Chaos*, Springer, 1992.
- [10] Tabor, M., *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, John Wiley & Sons, 1989.