

# **Medida, Dimensión y Fractales**



**José Luis Del Río-Correa.**  
**Departamento de Física, UAM-Iztapalapa**



**Resumen.**

Se hace una presentación pedagógica de la dimensión de Hausdorff, resaltando la forma en que Mandelbrot llevo este concepto altamente especializado a las ciencias naturales, en donde genéricamente es llamada la dimensión fractal. También se discuten algunas aplicaciones recientes como el uso de antenas fractales que son mas eficientes y versátiles que las habituales, estas antenas son utilizadas en telefonía celular y telecomunicaciones, todo ello provocado por los descubrimientos de Nathan Cohen.

**Introducción.**

El objetivo de este trabajo es hacer una presentación pedagógica de lo que entendemos por objetos fractales, este término fue acuñado por Benoit Mandelbrot en su artículo de titulado: ¿Qué tan grandes son las costas de Bretaña? publicado en la revista Science en 1967.[1]

Empezaremos por los estudios de Lewis Fry Richardson [2]) sobre la longitud de costas, que llevan a la conclusión de que en general la longitud  $L$  es una cantidad que depende de la escala  $\varepsilon$  que se use para medir, obteniendo experimentalmente una ley de potencias cuyo exponente caracteriza a una costa dada. Este es el exponente de Richardson de la costa en cuestión.

Por otra parte se presentan la teoría matemática de Felix Hausdorff [3, 4] que utilizando cubiertas define la medida de un objeto en una dimensión arbitraria, siendo esta medida casi siempre cero ó infinito, sin embargo existe un solo valor de la dimensión para la cual la medida es finita y distinta de cero, que es la dimensión de Hausdorff del objeto.

A primera vista los estudios de Richardson y los de Hausdorff no tienen nada en común, sin embargo Mandelbrot conjugó ambos resultados, mostrando que el exponente de Richardson y la dimensión de Hausdorff son prácticamente los mismos, el primero proveniente de un estudio experimental y el segundo de una teoría matemática abstracta. Usando esta identificación Mandelbrot define las curvas fractales y combinando las ideas de

Richardson con las de Hausdorff muestra como obtener la dimensión fractal de un objeto.

Mandelbrot encontró expresiones analíticas para la dimensión de Hausdorff de objetos que presentan la propiedad de auto-similaridad. Mostraremos que esta propiedad implica que el número mínimo de bolas cerradas de diámetro menor o igual que  $\varepsilon$  necesarias para cubrir un conjunto autosimilar  $F$ ,  $N_F(\varepsilon)$  satisface ecuaciones funcionales, cuya solución nos permite encontrar la dimensión de Hausdorff de estos conjuntos.

Mandelbrot presentó su trabajo sobre objetos fractales en una forma extensa en su libro *The Fractal Geometry of Nature* [5] actualmente considerado como un clásico, ya que cambio por completo nuestra visión de la naturaleza, en donde ahora se consideran muy importantes los fenómenos no-lineales, que generan objetos fractales relacionados con el caos determinista.

**Richardson y la longitud de las costas.**

En 1961 el físico L. F. Richardson fue comisionado para determinar la longitud de la costa oeste de Inglaterra, para ello tomo un mapa a una escala dada, y procedió a utilizar el método de Arquímedes que consiste en aproximar la costa por una poligonal, con lados iguales de longitud  $\varepsilon_1$ , contar el número de lados de la poligonal  $N(\varepsilon_1)$  y encontrar la longitud de la costa para la escala  $\varepsilon_1$ :

$$L(\varepsilon_1) = N(\varepsilon_1)\varepsilon_1 \quad (1)$$

Claramente esta cantidad es solo una estimación de la longitud de la costa, para obtener una mejor estimación construyó una nueva poligonal cuya longitud de sus lados es  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , evaluó  $N(\varepsilon_2)$  y calculó  $L(\varepsilon_2)$ , repitiendo este proceso para poligonales con una longitud de sus lados cada vez menor, obtuvo una secuencia de longitudes  $\{L(\varepsilon_1), L(\varepsilon_2), \dots, L(\varepsilon_n)\}$  con  $\varepsilon_n < \varepsilon_{n-1} < \dots < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ .

En la figura 1 se muestran los resultados que se obtienen para la longitud de la costa cuando se utilizan poligonales con lados cada vez más pequeños.

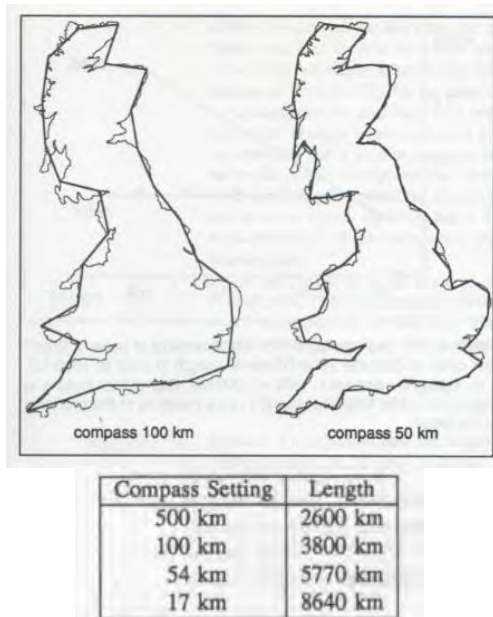


Figura 1. Método de Arquímedes para medir la longitud de las costas de Inglaterra.

El resultado que Richardson esperaba era que la secuencia de longitudes medidas con poligonales de lado cada vez más pequeño tendiera a un valor límite, el cual sería la longitud de la costa, v.gr.

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon)\varepsilon \quad (2)$$

Sin embargo, cuando Richardson llevó a cabo este proceso para medir la longitud de la costa oeste de Inglaterra, encontró que cada vez que reducía la escala de medición la longitud aumenta, esto es para  $\varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}$  obtuvo que  $L(\varepsilon_n) > L(\varepsilon_{n-1})$ , de manera que la secuencia de longitudes NO converge a un valor finito, sino que diverge a infinito:

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon)\varepsilon = \infty \quad (3)$$

Llegando a la conclusión de que la longitud de la costa de Inglaterra es infinita, y por lo tanto no es posible comparar diferentes regiones de la costa, para saber cual es la más grande, ya que ambas tienen una longitud infinita.

Ante este resultado inesperado, Richardson se dio cuenta que la longitud de la costa depende del valor de la escala utilizada para construir la poligonal, y procedió a buscar la forma explícita de

esta dependencia, para ello graficó en una escala doblemente logarítmica  $L(\varepsilon_n)$  contra  $\varepsilon_n$ , encontrando que los datos se ajustaban bastante bien por mínimos cuadrados a una recta de pendiente negativa:

$$\ln L(\varepsilon) = -|m| \ln \varepsilon + \ln b \quad (4)$$

este resultado implica que la longitud satisface la siguiente ley de potencias:

$$L(\varepsilon) = b\varepsilon^{-|m|} \quad (5)$$

utilizando este resultado se pueden comparar, para un valor dado de  $\varepsilon$ , dos partes de la costa aun cuando la longitud de cada una sea infinita, ya que al aproximar cada una de esta partes por una poligonal de lado  $\varepsilon$ , se satisface que:

$$L_1(\varepsilon) = b_1\varepsilon^{-|m|}; \quad L_2(\varepsilon) = b_2\varepsilon^{-|m|} \quad (6)$$

Por lo que la razón  $\frac{L_2(\varepsilon)}{L_1(\varepsilon)} = \frac{b_2}{b_1}$  no depende de la

longitud  $\varepsilon$  de la poligonal utilizada. Por lo tanto la extensión de ciertas partes de la costa pueden ser comparadas, no por sus longitudes sino por sus coeficientes  $b$ . Así, encontró que la forma de medir la extensión de la costa por el método de Arquímedes, que se utiliza para curvas lisas, es inaplicable, para medir las costas de Inglaterra.

A continuación Richardson investigó en enciclopedias y almanaques la longitud de la fronteras terrestres entre diferentes países. Para la frontera entre España y Portugal las fuentes españolas reportaban una longitud máxima de 987 Km. en tanto que las portuguesas reportaban 1214 Km., para la frontera entre Holanda y Bélgica, los primeros reportaban 380 Km. contra 449 Km. La forma en que Richardson explicó estos resultados es que los países limítrofes habían medido con diferentes escalas la longitud de sus fronteras, como se sigue del siguiente razonamiento:

- a) De los diferentes datos encontró que la pendiente de la recta en la gráfica log-log para la frontera España y Portugal era de  $-1/3$  en tanto que la de Bélgica y Holanda era de  $-1/4$ .

- b) Como la grafica log-log es una recta de pendiente  $m$ , se tiene que  $L(\epsilon) = b\epsilon^{-|m|}$ , de donde al medir la longitud con dos escalas diferentes tenemos la siguiente relación:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \left( \frac{L(\epsilon_1)}{L(\epsilon_2)} \right)^{\frac{1}{|m|}} \quad (7)$$

de donde se encuentra que la escalas usadas por los países limítrofes están relacionadas de la siguiente manera:

$$\epsilon_{\text{España}} = 1.86 \epsilon_{\text{Port.}}; \quad \epsilon_{\text{Holanda}} = 1.94 \epsilon_{\text{Bélgica.}}$$

La figura 2 muestra las diferentes medidas experimentales de Richardson de longitudes de varias curvas usando poligonales de lado  $\epsilon$  cada vez más pequeño.

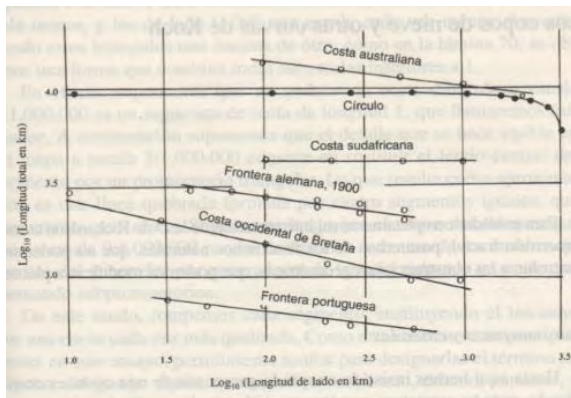


Figura 2. Resultados de Richardson.

### Medida y Dimensión de Hausdorff.

En 1919 Felix Hausdorff introdujo la noción de la medida de un conjunto *en todas las dimensiones posibles*.

Se define la medida de un conjunto  $M$ , como un número asociado a tal conjunto, y es denotado genéricamente por  $\mu(M)$ . Claramente existe muchos tipos de medidas, la que aquí nos ocupará será la medida de Hausdorff de  $M$  en dimensión  $\alpha$ :  $H_\alpha(M)$ .

$H_\alpha(M)$  esta asociada con  $N(\epsilon)$ , el número mínimo de esferas de diámetro  $\epsilon$  que adoquinan al conjunto  $M$ , y la dimensión  $\alpha$  entra al considerar el producto  $N(\epsilon)\epsilon^\alpha$ , así se define  $H_\alpha(M)$  por el siguiente límite:

$$H_\alpha(M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) \epsilon^\alpha \quad (8)$$

Ejemplos simples de medidas de Hausdorff en dimensiones enteras son los siguientes:

La medida de Hausdorff en dimensión 1 de una curva acotada es la longitud de la curva, ya que  $N(\epsilon)$  es el número de lados de la poligonal, y  $\epsilon$  es la longitud del lado.

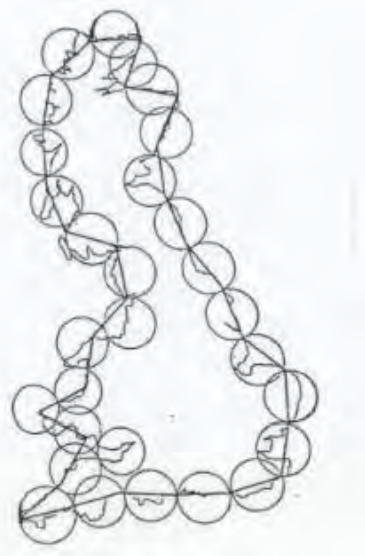


Figura 3.  $H_1(\text{Costas de Inglaterra}) = N(\epsilon)\epsilon$

Cuando  $M$  es una región acotada en un plano,  $H_2(M)$  es el área de esta región, en tanto que si  $M$  denota una región acotada en el espacio  $H_3(M)$  es el volumen de esa región.

Para objetos unidimensionales como una línea ó bien el intervalo unitario, el número  $N(\epsilon)\epsilon=L$ , nos da la longitud del intervalo de manera que para objetos unidimensionales tenemos que  $N(\epsilon)=L\epsilon^{-1}$ . Cuando se trata de una superficie, que es adoquinada con  $N(\epsilon)$  cuadrados de arista  $\epsilon$ , el área esta dada por  $A=N(\epsilon)\epsilon^2$ , por lo que para objetos bidimensionales  $N(\epsilon)=A\epsilon^{-2}$ , para medir el volumen de un objeto, lo llenamos con  $N(\epsilon)$  cubos de arista  $\epsilon$ , y su volumen esta dado por  $V=N(\epsilon)\epsilon^3$ , de forma que para objetos tridimensionales  $N(\epsilon)=V\epsilon^{-3}$ . Vemos que para estos casos familiares  $N(\epsilon)$  aumenta cuando  $\epsilon$  disminuye y satisface una ley de potencias donde el exponente es la dimensión del



objeto, generalizando estos resultados esperamos que  $N(\varepsilon)$  se comporte para valores pequeños de  $\varepsilon$  siguiendo una ley de potencias de la forma:

$$N(\varepsilon) = A \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^D \quad (9)$$

en donde el exponente  $D$  es una cantidad característica del conjunto  $M$ , de manera que:

$$H_\alpha(M) = A \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\alpha-D} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > D \\ A & \text{si } \alpha = D \\ \infty & \text{si } \alpha < D \end{cases} \quad (10)$$

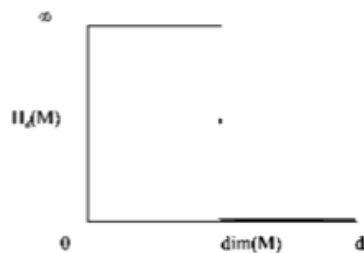


Figura 4. Gráfica de las medidas de Hausdorff de un objeto para toda dimensión.

el hecho de que  $N(\varepsilon)$  satisfaga una ley de potencias, implica que las medidas de Hausdorff para casi todas las dimensiones toman el valor cero ó el valor infinito, en cuyo caso se dice que la medida de Hausdorff del objeto en esa dimensión es degenerado, y solamente existe una dimensión característica del conjunto  $M$  para la cual la medida de Hausdorff proporciona un valor diferente. Este valor define la dimensión de Hausdorff de  $M$ . Notemos que  $H_\alpha(M)$  es nula para dimensiones mayores que la dimensión de Hausdorff  $D$  y es infinita para dimensiones menores que  $D$ .

### Mandelbrot y la Dimensión fractal.

Los resultados de Richardson y de Hausdorff aparecen en áreas del conocimiento muy distintas, el primero es un estudio muy aplicado y el segundo se desarrolla en el campo de la matemática abstracta, y se necesitaba de alguien muy especial para establecer una relación entre ambos trabajos. Esta persona fue Benoit Mandelbrot, quien encuentra la conexión entre ellos en 1967 y establece por primera vez que en la naturaleza no solamente las costas presentan un comportamiento

“anómalo” sino que este comportamiento es el habitual en la naturaleza, que sin saber nada de matemáticas utiliza en forma extensiva las ideas abstractas de Hausdorff.

Notemos que lo que ambos trabajos tienen en común es que aparecen leyes de potencias, en el primer caso asociados con la dependencia de la longitud con respecto a la escala (véase ec. (5)) y en el caso de Hausdorff en la ley de potencias que gobierna el número mínimo de esferas que se requieren para adoquinar eficientemente un conjunto (véase la ec. (9)), y en segundo lugar que la longitud es la medida de Hausdorff en dimensión 1 (véase las ecs (2) y (8)). Esto nos permite establecer una conexión entre la pendiente de la recta en las gráficas log-log de Richardson y la dimensión de Hausdorff, de las ecs. (1) y (5) tenemos :

$$N(\varepsilon) = \frac{L(\varepsilon)}{\varepsilon} = b\varepsilon^{-1-|m|} \quad (11)$$

Identificando el número de lados de la poligonal con el número óptimo de esferas de diámetro que cubren la costa, tenemos de la ec. (9) y (11):  $b\varepsilon^{-1-|m|} = A\varepsilon^{-D}$ , de donde encontramos que la dimensión de Hausdorff de las costas es:

$$D = 1 + |m| \quad (12)$$

y como  $A = b$ , la medida de las costas en dimensión  $D$  es igual a la intersección de la recta con el eje de las ordenadas. La ec. (10) implica que como las costas tienen una dimensión de Hausdorff mayor que 1, su longitud (la medida de Hausdorff en dimensión 1) es infinita. Por una parte las ideas de Hausdorff permiten entender los resultados aparentemente paradójicos de Richardson, y por otra parte el trabajo de Richardson nos permite encontrar un algoritmo para encontrar la dimensión de Hausdorff de un objeto.

### Algoritmo de Richardson para encontrar la dimensión de Hausdorff y su medida.

La cubierta del objeto puede ser con esferas o con cuadrados, en el caso de objetos en un plano es más simple cubrirlo con cuadrados ó con píxeles.

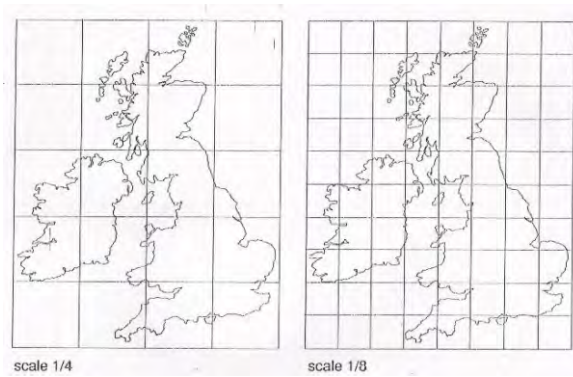


Figura 5. Mapa de Inglaterra dentro de cuadrículas de escalas 1/4 y 1/8.

Consideremos el problema original de Richardson, que consiste en medir la longitud de las costas de Bretaña. Para lo que utilizamos un mapa de Inglaterra y una cuadrícula de lado  $\epsilon_1$ , contamos el número  $N(\epsilon_1)$  de cuadrados que se requieren para cubrir la costa de Bretaña, a continuación se construye una cuadrícula mas fina de lado  $\epsilon_2$  contando el número  $N(\epsilon_2)$  de cuadrados que adoquinan la costa, repitiendo este proceso para cuadrículas cada vez más finas se encuentra un arreglo de la forma:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_q \\ N(\epsilon_1) & N(\epsilon_2) & \dots & N(\epsilon_q) \end{pmatrix} \quad (13)$$

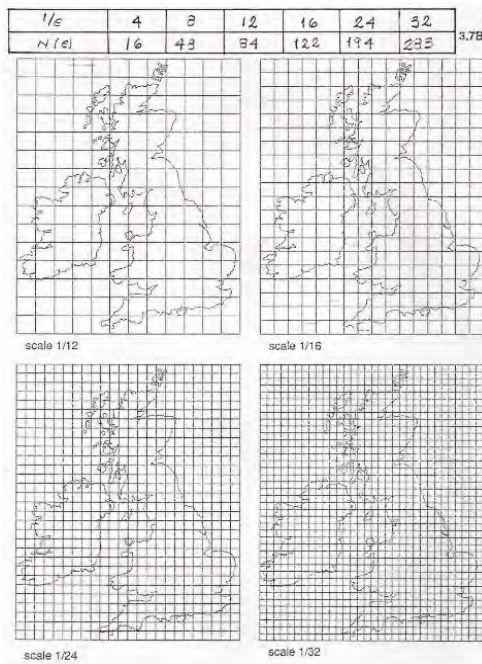


Figura 6. Mapa de Inglaterra dentro de cuadrículas de escalas 1/12 a 1/32, y el número de cuadrados que se requieren para adoquinar las costas de Inglaterra.

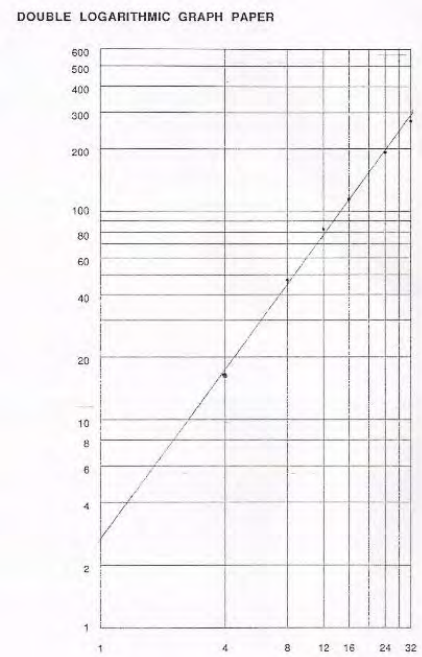


Figura 7. Grafica log-log de los resultados encontrados en las figuras 5 y 6.

Se grafican los puntos de coordenadas  $(-\ln \epsilon_r, \ln N(\epsilon_r))$ . A estos puntos se le ajusta una recta utilizando mínimos cuadrados. La pendiente de la recta es entonces la dimensión de Hausdorff y su ordenada al origen es  $H_D(M)$ .

Claramente este algoritmo puede implementarse fácilmente utilizando imágenes de una costa tomadas por satélite y variando el tamaño de los pixeles que cubre la región bajo estudio.

**Dimension fractal de objetos autosimilares**



Figura 8. Coliflor mostrando la característica de conjunto autosimilar en diferentes escalas.



En general no se tiene una expresión sencilla para calcular la dimensión de Hausdorff de un conjunto dado, y normalmente tiene que hacerse en forma numérica, sin embargo existen ciertos conjuntos para los cuales es posible encontrar expresiones cerradas que permitan calcular su dimensión. Estos son objetos que presentan la propiedad de autosimilaridad, que significa que son conjuntos que están formados por copias reducidas del mismo objeto, un ejemplo simple son las coliflores, como se muestra en la fig. 8. Para definir matemáticamente estos objetos empezaremos por definir una transformación de similitud.

En el espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , un real  $r$  positivo determina una transformación de similitud cuando un punto  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , se transforma como  $r(\vec{x}) = (rx_1, rx_2, \dots, rx_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Lo anterior es simplemente tomar el vector de posición de un punto y cambiar su magnitud por un factor  $r$ . Cuando aplicamos esta transformación a un conjunto  $F$  de puntos, si  $r > 1$  se obtiene una copia amplificada de  $F$  en tanto que para  $r < 1$  se obtiene una copia reducida del conjunto, para definir los objetos autosimilares estaremos interesados en casos en que  $r$  sea menos que 1. Así esta transformación aplicada a un subconjunto  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  define a un nuevo conjunto  $r(F)$  como:

$$r(F) = \{r(\vec{x}) : \vec{x} \in F\}$$

Esta transformación corresponde a aplicar una matriz diagonal con elemento  $r$  a todos los puntos de  $F$ .

Otro concepto que usaremos para definir la autosimilaridad es el de congruencia entre dos conjuntos, diremos que dos conjuntos  $F$  y  $G$  en  $\mathbb{R}^n$  son congruentes, si son idénticos excepto por desplazamiento y rotaciones, denotándose la congruencia por  $F \sim G$ . Esto significa que si desplazamos a  $F$  y luego lo rotamos (incluyendo las rotaciones impropias, que corresponden a inversiones ó reflexiones) todos los puntos de  $F$  coinciden con los de  $G$ .

Diremos que un conjunto  $F$  es autosimilar en las razones  $\{r_1, r_2, \dots, r_q\}$ , cuando  $F$  esta formado por copias idénticas a él pero cada copia esta escalada, siendo  $\{r_1, r_2, \dots, r_q\}$  los factores de escala, en símbolos tenemos:

$$F = \bigcup_{i=1}^q F_i \text{ donde } F_i \sim r_i(F) \text{ y además } F_i \cap F_j = \emptyset \quad (14)$$

El caso más sencillo de conjunto autosimilar es cuando todas las razones son iguales, o sea  $r_1 = r_2 = \dots = r_q = r$ , en cuyo caso se dice que  $F$  es autosimilar con respecto a la razón  $r$  y a un entero  $q$ .

Para ejemplificar este concepto, en la figura 9 se muestra el triángulo de Sierpinski, que esta conformado por tres copias reducidas por un factor de un medio.

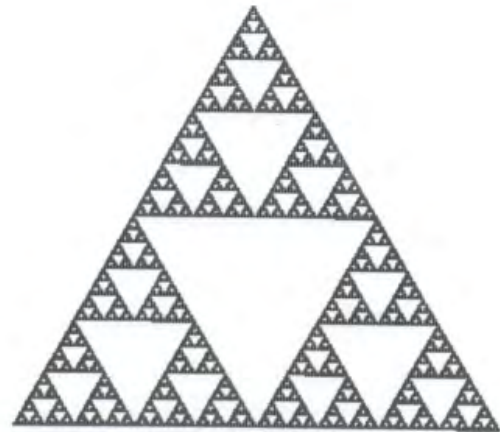


Figura 9. Triángulo de Sierpinski.

Para calcular la dimensión de Hausdorff de conjuntos autosimilares con una sola razón, necesitamos encontrar la ley de potencias que satisface el número  $N_F(\epsilon)$  de esferas de diámetro  $\epsilon$  necesarias para cubrir  $F$ , y utilizar la ec.(9) para evaluar la dimensión de Hausdorff. Para resolver este problema haremos uso de análisis funcional.

Supongamos que podemos adoquinar a  $F$  con  $N_F(\epsilon)$  esferas de diámetro  $\epsilon$ , conociendo que  $F$  es autosimilar en una razón  $r$  y un entero  $q$ , nos preguntamos cuantas esferas de diámetro  $r\epsilon$  necesitamos para adoquinar a  $F$ .

Hagamos una reducción en un factor  $r$  de  $F$  incluyendo a su cubierta de esferas de diámetro  $\varepsilon$ , así obtenemos una copia reducida  $r(F)$ , cubierta por  $N_F(\varepsilon)$  esferas de diámetro  $r\varepsilon$ , por autosimilaridad requerimos de  $q$  copias reducidas  $r(F)$  para conformar al conjunto  $F$ , de manera que el número de esferas de diámetro  $r\varepsilon$  necesarias para cubrir  $F$  esta dado por:

$$N_F(r\varepsilon) = qN_F(\varepsilon) \quad (15)$$

que es una ecuación funcional cuya solución es (ver Apéndice):

$$N_F(\varepsilon) = A\varepsilon^\alpha \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{\ln q}{\ln r} \quad (16)$$

al comparar este resultado con la ec. (9), encontramos que la dimensión de Hausdorff de un conjunto autosimilar en la razón  $r$  y el entero  $q$  esta dada por:

$$D = -\frac{\ln q}{\ln r} \quad (17)$$

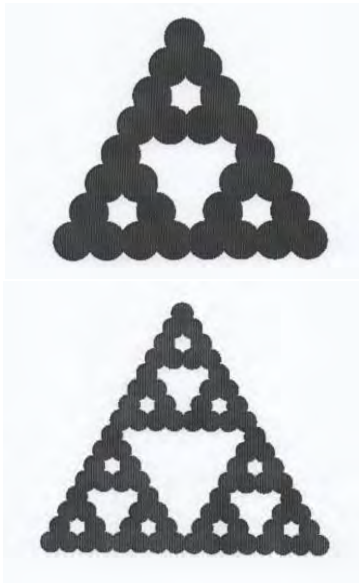


Figura 10. La cubierta de abajo esta formada por tres copias reducidas por un factor de  $\frac{1}{2}$  de la cubierta de arriba.

Calcularemos ahora la dimensión de Hausdorff de un conjunto autosimilar conformado por la unión de  $q$  reducciones de  $F: \{F_1, F_2, \dots, F_q\}$  con las

razones  $\{r_1, r_2, \dots, r_q\}$ , de manera que  $F_k = r_k(F)$ , Supondremos ahora que  $F_k$  es cubierto por  $N_{F_k}(\varepsilon)$  esferas de diámetro  $\varepsilon$  si agrandamos este conjunto con su cubierta por un factor  $\frac{1}{r_k}$  vemos que  $F$  es

cubierto por esferas de diámetro  $\frac{\varepsilon}{r_k}$ , de manera

que:

$$N_{F_k}(\varepsilon) = N_F\left(\frac{\varepsilon}{r_k}\right) \quad \text{como} \quad N_F(\varepsilon) = \sum_{k=1}^q N_{F_k}(\varepsilon),$$

obtenemos la ecuación funcional:

$$N_F(\varepsilon) = \sum_{k=1}^q N_F\left(\frac{\varepsilon}{r_k}\right) \quad (18)$$

La dimensión de Hausdorff se encuentra al proponer la ec.(9) como solución de la ecuación funcional anterior, así al substituir la ec.(9) en la ec.(17), se tiene:

$$A\varepsilon^{-D} = A\varepsilon^{-D} \sum_{k=1}^q r_k^D \quad (19)$$

por lo que la dimensión de Hausdorff es la solución de la ecuación:

$$\sum_{k=1}^q r_k^D = 1 \quad (20)$$

Aplicando este resultado en caso particular en que todas las razones sean iguales:  $r_1 = r_2 = \dots = r_q = r$ , entonces tenemos que (19)

toma la forma:  $qr^D = 1$ , de donde se obtiene de inmediato la ec.(17). Estos resultados muestran que cuando el objeto es autosimilar, entonces  $N_F(\varepsilon)$  satisface ecuaciones funcionales relativamente simples, cuya solución es una ley de potencias que determina la dimensión de Hausdorff de objetos autosimilares.



### Mandelbrot y las curvas Monstruosas.

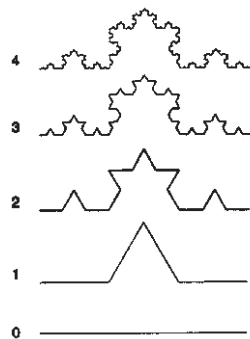
Terágono es una palabra acuñada por Mandelbrot que viene del griego “teras” que significa monstruo, criatura extraña y de “gonia” que significa esquina, ángulo, de forma que los terágonos son curvas monstruosas con muchas esquinas. Lo monstruoso de ellas consiste en que son curvas continuas que no son derivables en ningún punto, las cuales se pensaba que eran de muy difícil construcción, sin embargo Mandelbrot en su libro[5] enseña como utilizando un proceso iterativo es posible construir estas curvas y además que cuando el número de lados de estas curvas tiende a infinito se obtienen fractales autosimilares.

Los terágonos son construidos utilizando un iniciador y un proceso de cascada. Para familiarizarnos con el proceso consideremos la construcción de la curva de Koch.

El iniciador consiste en tomar un segmento de línea dividirlo en tres partes iguales, reemplazar al segmento medio por dos segmentos iguales formando parte de un triángulo equilátero.

La cascada consiste en aplicar el generador sobre cada uno de los segmentos, así a cada segmento se le reemplaza por cuatro segmentos de longitud  $1/3$  de su antecesor. Este proceso se repite una y otra vez, dando lugar a la curva de Koch.

En la figura 11 se muestran los primeros pasos para obtener la curva de Koch, en donde la figura 1 es el iniciador y las figuras siguientes corresponden al proceso de cascada. La curva de Koch es el límite al que tiende la figura cuando iteramos un número infinito de veces.



Construcción de la curva de Koch

Figura 11. Iniciador y tres procesos de cascada que generan la curva de Koch.

Analizaremos ahora las diferentes características que llevaron a considerar monstruosa a esta curva. La longitud de la curva aumenta en cada paso de la construcción por un factor  $4/3$ , de manera que denotando por  $L(\varepsilon)$  la longitud de la curva cuando cada lado del teragono es igual a  $\varepsilon$ , en el siguiente paso la longitud del teragono será  $\varepsilon/3$  y la longitud total será  $4 L(\varepsilon)/3$ , así:

$$L\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{4}{3} L(\varepsilon)$$

la solución de esta ecuación funcional es

$$L(\varepsilon) = A\varepsilon^\alpha \quad \text{con} \quad \alpha = 1 - \frac{\ln 4}{\ln 3} < 0$$

La longitud de la curva de Koch se encuentra cuando se toma el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , como  $\alpha$  es negativo se encuentra que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon) = \infty$ , así esta curva tiene una longitud infinita.

Mandelbrot hace notar que la longitud del teragono satisface una ley de potencias idéntica con la longitud de las costas de Richardson, por lo que la curva de Koch es un modelo muy simple para las costas, de hecho es posible formar una modelo de juguete para una isla, cuando se aplica mismo iniciador a un triángulo equilátero y aplicando el proceso de cascada a cada lado del triángulo se encuentra un objeto que tiene una área finita pero con un perímetro infinito.

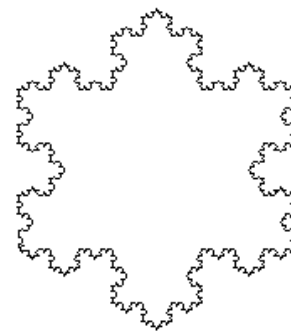


Figura 12. Modelo de una isla, utilizando la curva de Koch.

Con respecto a los puntos en que los terágonos no tienen derivada, observamos que en la  $n$ -ésima iteración su número es  $4^n - 1$ , y como la curva de Koch se obtiene en el proceso límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , encontramos que la curva de Koch tiene un número infinito de puntos singulares.

También observamos que la curva de Koch es autosimilar ya que esta formada por cuatro copias idénticas a ella pero reducidas por una razón  $1/3$ , de manera que su dimensión de Hausdorff es  $D = \ln 4 / \ln 3$ .

Debido a todas estas extrañas propiedades de la curva de Koch se le catalogaba como una curva monstruosa, pero Mandelbrot nos hace ver que la naturaleza elige precisamente la geometría de las curvas monstruosas.

En general, los terágonos son construidos utilizando un iniciador y un proceso de cascada. El iniciador consiste en sustituir un segmento de línea recta que une los puntos A y B, por una línea quebrada formada por  $\eta$  líneas de igual longitud que una los puntos A y B. La cascada consiste en repetir el mismo proceso sobre cada una de las líneas que conforman la línea quebrada, y a la figura resultante repetirle en proceso, generando un proceso iterativo.

El proceso anterior lo podemos expresar diciendo que cuando el terágono esta formado por una poligonal de  $N(\varepsilon)$  lados cada uno con una longitud  $\varepsilon$ , al aplicar el generador a cada lado de la poligonal se obtiene una nueva poligonal con un número de lados  $\eta N(\varepsilon)$  y la longitud de cada lado es  $r\varepsilon$ , de manera que  $N(r\varepsilon) = \eta N(\varepsilon)$ , que es la relación que satisfacen los objetos autosimilares, de manera que la construcción de terágonos con las reglas de Mandelbrot nos permite construir fractales autosimilares.

La dimensión fractal de los objetos autosimilares construidos con las reglas de Mandelbrot, se encuentra directamente del generador del terágono, al contar  $N$  el número de lados que tiene la línea quebrada, y dar el factor de reducción  $r$  que se

aplica a la longitud del segmento AB, para obtener la longitud de uno de los lados del teragono, i.e.

$$D = -\frac{\ln N}{\ln r}$$

### **Antenas Fractales, teléfonos celulares y el hombre invisible.**

Con objeto de que el lector tenga idea de la importancia de los fractales en nuestra vida cotidiana a reproduzco continuación parte de un artículo de Wikipedia [6].

*“ Los elementos de antenas construidos con curvas autosimilares fueron creados en 1988 por Nathan Cohen, de la Universidad de Boston. Los diseños de Cohen para una gran variedad de antenas fractales fueron publicados en 1995 [7], siendo esta la primera publicación científica sobre antenas fractales, que dio lugar a una gran cantidad de patentes de Cohen para garantizar la prioridad de su invención. La mayoría de los trabajos sobre antenas fractales hacen referencia a estas patentes. Muchos elementos de las antenas fractales utilizan la estructura fractal como una combinación virtual de condensadores y bobinas. Esto hace que la antena posea muchas resonancias diferentes que pueden escogerse y ajustarse seleccionando el diseño fractal adecuado. Su complejidad aparece porque la corriente sobre la estructura fractal tiene un arreglo complejo causado por la inductancia y la auto-capacitancia. En general aunque la longitud eléctrica efectiva es muy grande, las antenas con elementos fractales son físicamente pequeñas.*

*Los elementos fractales de las antenas son de tamaño muy pequeño comparadas con las de diseño tradicional y no requieren componentes adicionales, cuando la estructura fractal tiene la impedancia resonante de entrada adecuada. En general la dimensión fractal de una antena fractal predice pobremente su funcionamiento y aplicación. No todas las antenas fractales trabajan bien para una aplicación ó conjunto de aplicaciones dados. para encontrar el diseño fractal que mejor ajusta a la necesidad de las aplicaciones se requieren frecuentemente métodos*



de investigación y simulación de antenas por computadora.

Una antena fractal utiliza un diseño autosimilar con objeto de maximizar la longitud de materiales que pueden recibir o transmitir radiaciones electromagnéticas dentro de una superficie ó volumen dado.

Las antenas fractales están formadas por curvas que llenan el espacio y también se conocen como antenas multinivel. Su característica fundamental consiste en la repetición de un motivo sobre dos o mas tamaños de escalas, ó iteraciones, razón por la que las antenas fractales son muy compactas, multibandas o de banda ancha y tienen aplicaciones útiles en la telefonía celular y en la comunicación por microondas.

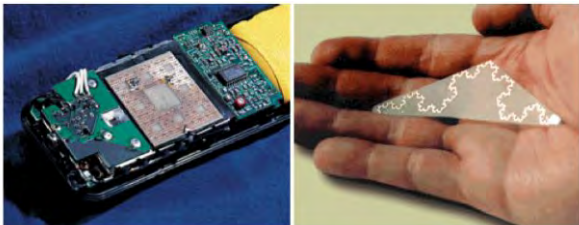


Figura 13. Antenas fractales para celulares.  
<http://classes.yale.edu/fractal/panorama>.

Un ejemplo de antena fractal como una curva que llena el espacio esta en la forma de una hélice fractal encogida, en donde cada línea de cobre es una pequeña fracción de una longitud de onda.

La respuesta de una antena fractal difiere marcadamente la de una antena tradicional, ya que es capaz de tener un funcionamiento muy bueno ó excelente en diferentes frecuencias de manera simultanea. Las antenas tradicionales están diseñadas para responder en un intervalo de frecuencia y las antenas estándar solo trabaja bien en ese intervalo.

Esta hace de las antenas fractales un excelente diseño para aplicaciones de banda ancha y multibanda. Además la naturaleza de las antenas fractales hace que su tamaño sea muy pequeño, sin el uso de componentes tales como inductores y condensadores.”



Figura 14. Antena Fractal donde la superficie de una hélice esta cubierta por una curva fractal de cobre.

Recientemente se publicó un artículo [9] en el cual se utiliza los terágonos para construir antenas con la forma de la isla ó copo de nieve de Koch que funcionan en multibandas y para microondas.

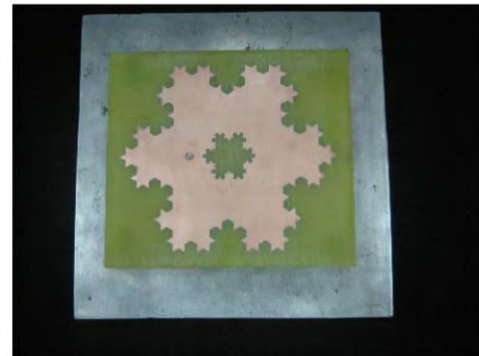


Figura 15. Antena fractal de alta direccionalidad.  
Referencias 10 y 11.

Se recomienda ver el sitio [www.fractena.com](http://www.fractena.com), de la compañía Fractal Antenna Systems fundada por Nathan Cohen para tener una información mas detallada de las diferentes y fascinantes aplicaciones de los fractales a nuestra vida diaria, y además ver como se hace realidad la ficción del hombre invisible. Terminaremos con una frase de N. Cohen refiriéndose a la “máquina fractal” que hace posible la invisibilidad de un objeto:

**“Esto no es magia, es física usando la tecnología de fractales. Es real, es genial y es el principio de algo muy grande.”**

**Referencias.**

1.- Benoit Mandelbrot How long is the coast of Britain? . Statistical self-similarity and fractional dimension. Science 155, 636-638. 1967. Reproducido en Classics on Fractals. Ed. Gerald A. Elgar, Addison Wesley, 1993.

2.- Lewis Fry Richardson. The problema of contiguity: an appendix of statistic of deadly quarrels. General Systems Yearbook 6, 139-187. 1961.

3.- Felix Hausdorff Dimension und äusseres mass Mathematische Annalen 79, 157-179. 1911

4.- Felix Hausdorff , Dimension and Outer Measure, 1918. Reproducido en Classics on Fractals. Ed. Gerald A. Elgar, Addison Wesley, 1993.

5.-B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, 1982, W.H. Freeman and Company.

6.- Fractal Antenna. Wikipedia.

7.- Cohen, N. (Summer 1995). "Fractal Antennas". Communications Quarterly: 9.

8.- N. A. Saidatul, A. A. H. Azremi, R. B. Ahmad, P. J. Soh, and F. Malek (2009). "Multiband Fractal Planar Inverted F Antenna (F-Pifa) for Mobile Phone Application". Progress In Electromagnetics Research B 14: 127–148. doi:10.2528/PIERB0903080.

9.- Abdelati Reha, Abdelkebir El Amri, Othmane Benhammouch, Ahmed Oulad Said. CPW-Fed KOCH SNOWFLAKE Fractal Antenna for UWB Wireless Applications. Transactions on Networks and Communications. August, 2014 Vol.2 Issue 4. DOI: 10.14738/tnc.24.337

10.-Abbas Bin Younas Awan, Zubair Ahmed and Mojeeb Bin Ihsan, "A New High Directivity Fractal Antenna Based on the Modified Koch Snowflake Geometry" Asia Pacific Microwave Conference (APMC 2010) Dec 7-10, 2010, Yokohama Japan.

11.-Abbas Bin Younas Awan, "High Directivity Fractal Antenna," MS Thesis, College of E&ME, NUST, 2010.

**Apéndice.**

En este apéndice mostraremos que la ecuación funcional  $f(ax)=bf(x)$  tiene por solución:

$$f(x) = Ax^\alpha \text{ con } A \text{ cte y } \alpha = \frac{\log b}{\log a} \quad (21)$$

Para ello utilizamos los siguientes argumentos: La ecuación funcional  $f(ax)=bf(x)$  se expresa como una función de iteración al definir

$$x_n = ax_{n-1}; y_n = by_{n-1}; \quad (A-1)$$

que nos permite escribir la ecuación funcional en la forma:

$$y_n = f(x_n) \quad (A-2)$$

la solución de las dos primeras ecuaciones de iteración esta dada por:

$$x_n = a^n x_0; y_n = b^n y_0; \quad (A-3)$$

si ahora despejamos n de ambas ecuaciones se encuentra:

$$n \log a = \log \frac{x_n}{x_0}; n \log b = \log \frac{y_n}{y_0} \quad (A-4)$$

eliminando el parámetro n de las ecuaciones (A-4), tenemos:

$$\log \frac{y_n}{y_0} = \left( \frac{\log b}{\log a} \right) \log \frac{x_n}{x_0} = \alpha \log \frac{x_n}{x_0}; \quad (A-5)$$

Donde

$$\alpha = \left( \frac{\log b}{\log a} \right)$$

de manera que se encuentra:

$$y_n = Ax_n^\alpha \text{ con } A = \frac{y_0}{x_0^\alpha}, \quad (\text{A-6})$$

finalmente utilizando la ecuación (A-2) se obtiene la ecuación (21).