¿Se puede calcular la órbita de la Tierra alrededor del Sol usando únicamente las mates de secundaria?

Adrián M. Escobar Ruiz
Rafael Leonardo Azuaje Hidalgo
Departamento de Física,
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa

Casa abierta al tiempo

Foto proporcionada por los autores

Abstract
Since Human Beings can see the stars in the sky, they have wanted to understand and describe their movement. Currently we can mathematically describe the movement of celestial objects, as well as other objects in nature. However, this knowledge seems to be restricted to physicists and mathematicians who are experts in the field. In this text we briefly present in an accessible way some ideas and developments that allow us to describe the movement of certain physical systems that we can find in nature, including the movement of celestial objects, using only the mathematical tools regularly taught in secondary education.

Keywords: solvability, Hamiltonian systems, conserved quantities, Kepler problem.

Resumen
Desde que el ser humano puede ver las estrellas en el cielo ha querido comprender y describir el movimiento de estas. Actualmente podemos describir de manera matemática el movimiento de objetos celestes, además de otros objetos de la naturaleza. Sin embargo, este conocimiento parece estar restringido a solo físicos y matemáticos expertos en el tema. En este texto presentamos de manera breve y accesible algunas ideas y desarrollos que nos permiten describir el movimiento de ciertos sistemas físicos que encontramos en la naturaleza, entre ellos el movimiento de objetos celestes, usando solo las herramientas matemáticas que se enseñan regularmente en secundaria.

Palabras clave: solubilidad, sistemas Hamiltonianos, cantidades conservadas, problema de **Kepler.**

1. Introducción

Desde antes de la Grecia antigua el ser humano ha sentido una curiosidad (¿Por qué ocurren el día y la noche?) y una fascinación innata (basta ver una aurora boreal o las constelaciones) por los fenómenos de la naturaleza que ocurren a su alrededor. Se han y siguen formulándose preguntas para tratar de entender los fenómenos naturales donde los conceptos de energía, tiempo y espacio aparecen una y otra vez. Esencialmente, estamos hablando de la Física. Es en este sentido que al plantearnos alguna interrogante acerca de la naturaleza nos convertimos en físicos. La principal tarea de los físicos es hacer preguntas.

El cómo y el porqué del movimiento de los objetos de la naturaleza, desde diminutas partículas de polvo o granos de arena hasta cuerpos celestes como planetas y estrellas, fue establecido por primera vez de manera clara y precisa por Sir Isaac Newton (1642-1727) en su célebre libro de *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. El trabajo de Newton se resume principalmente en lo que hoy día conocemos como las tres leyes de Newton y sentó las bases del campo de estudio que hoy conocemos como la Mecánica Clásica.

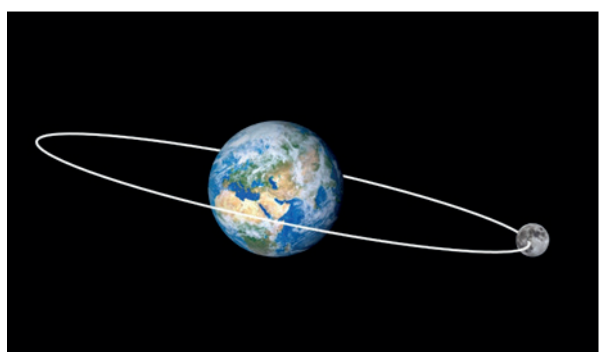

Figura 1. Movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. La trayectoria de la Luna es aproximadamente una elipse con la Tierra en uno de sus focos. Fuente: https://www.tercerplaneta.net/2022/05/la-orbita-de-la-luna.html

En Mecánica Clásica, el objetivo primordial es encontrar cómo cambia la posición del sistema (por ejemplo, una partícula) cuando transcurre el tiempo. En otras palabras, queremos determinar su dinámica y, por ende, poder predecir en dónde se va a encontrar el sistema en un tiempo posterior (sabemos cuántos años hay que esperar para ver pasar otra vez al cometa Halley). En este texto mostramos de una manera simple y didáctica, cómo encontrar la trayectoria de ciertos sistemas físicos resolviendo únicamente ecuaciones algebraicas que involucran sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, operaciones con exponentes y radicales. Es oportuno mencionar que, para encontrar trayectorias generalmente es necesario resolver ecuaciones donde aparecen derivadas (ecuaciones diferenciales) y, por ende, son más difíciles de resolver que las algebraicas.

A continuación, se describe el contenido del presente trabajo. En primer lugar, hacemos un breve repaso de la segunda Ley de Newton, que dicta cómo se mueven los objetos clásicos, con su correspondiente formulación matemática (sección 2) a un nivel elemental. Enseguida pasamos a describir un formalismo equivalente de la Mecánica de Newton, la llamada Mecánica Hamiltoniana (sección 3). Esta formulación moderna permite desarrollos que serían muy complicados con la teoría clásica de Newton. En la sección 4 se aborda un tema fundamental en física, la conservación de la energía, como preámbulo al estudio de otras cantidades físicas que no cambian durante la evolución temporal (cantidades conservadas). Se pondrá énfasis en el uso de las cantidades conservadas para encontrar las trayectorias de aquellos sistemas que poseen un número suficiente de las mismas (sección 5). Finalmente, para ilustrar las ideas, en la sección 6 se resuelve un sistema físico relevante conocido bajo el nombre de *problema de Kepler* (en honor al famoso astrónomo alemán Johannes Kepler 1571-1630). Un caso particular de este sistema describe el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, así como el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra (Figura 1). La terminología científica se describe o explica en el texto de forma autoconsistente.

2. La Mecánica de Newton

En relación con el movimiento de los objetos, la segunda ley de Newton es un bloque fundamental de la Mecánica Clásica, y establece que la aceleración de una partícula es proporcional a la fuerza total que se le aplica y donde la constante de proporcionalidad es su masa. Esto significa que una partícula se mueve en la misma dirección de la fuerza aplicada sobre ella, y su masa desempeña el papel de una susceptibilidad, es decir, representa una medida de qué tan fácil o difícil es cambiar el estado de su movimiento. Es más sencillo mover una silla que un camión estacionado, porque la silla es más susceptible desde el punto de vista Mecánico.

Observación: La segunda ley de Newton la dictan los resultados experimentales. Es una expresión matemática que se verifica en la descripción de los fenómenos de la naturaleza.

Para aterrizar las ideas, pensemos en el caso más simple de la dinámica de una partícula que se mueve sólo en una sola dimensión (a lo largo de una recta). Matemáticamente este movimiento se describe en el espacio Euclidiano unidimensional R (el eje real), y entonces la segunda ley de Newton se representa simplemente con la ecuación

$$F = m\,a\,, \tag{1}$$

donde F es la fuerza (total) ejercida sobre la partícula, m es la masa de la partícula y a es su aceleración. En este caso todas las cantidades toman valores numéricos reales. De forma más específica, la posición de la partícula sobre el eje real R se denota con la letra x la cual depende del tiempo t, así que escribimos $x(t)$ para dejar indicación explícita de la dependencia temporal. La función $x(t)$ proporciona toda la información dinámica de la partícula. Surge la pregunta natural ¿Cómo se obtiene esta función $x(t)$?, lo veremos enseguida. La velocidad de la partícula es la razón de cambio (instantánea) de la posición con respecto del tiempo, matemáticamente escribimos:

$$v = \frac{dx}{dt}, \tag{2}$$

(la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo). Análogamente, la aceleración es la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo, así que:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}, \tag{3}$$

y, por lo tanto, la segunda ley de Newton tiene la forma:

$$F = m\,a = m\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{4}$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en la variable dependiente $x(t)$ de la variable independiente t (una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación que involucra la derivada de alguna variable dependiente con respecto de una variable independiente). Resolviendo esta ecuación determinamos la posición de la partícula para cualquier tiempo t y con ello diríamos que hemos resuelto el problema.

Si pensamos ahora en una situación más general, como lo es el movimiento de una partícula en el espacio tridimensional (una pelota de Ping-Pong en el Laboratorio), entonces matemáticamente el movimiento se describe en el espacio Euclidiano R^3, ya que se requieren 3 coordenadas para especificar la posición de la partícula (ver Figura 2). En este caso la fuerza y la aceleración son cantidades vectoriales, y la posición se denota por el vector $\vec{r} = (x, y, z)$ donde cada componente es una función dependiente del tiempo.

En consecuencia, ahora la segunda ley de Newton es un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias (una ecuación para cada variable *(x, y, z)* del vector posición). En general, un sistema físico puede estar compuesto de varias partículas y la descripción completa del sistema significa describir el movimiento de cada una de ellas. Así que describir la trayectoria de un sistema físico en el tiempo, es decir, encontrar el vector de posición de cada partícula, equivale a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, dichas ecuaciones se llaman ecuaciones de movimiento del sistema.

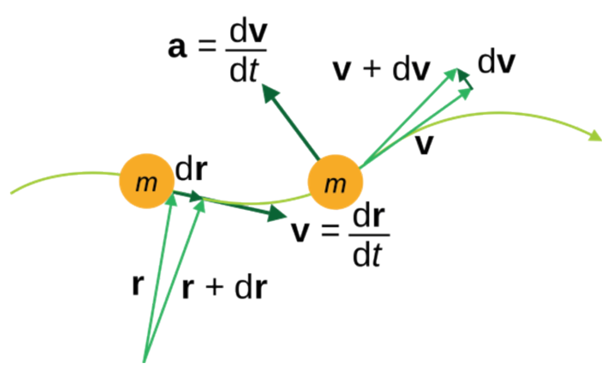

Figura 2. Descripción esquemática del movimiento en tres dimensiones de una masa puntual m. Fuente:https://en.wikipedia.org/wiki/Position_%28geometry%29#/media/File:Kinematics.svg

Hemos mencionado que el campo de estudio que inició con el trabajo de Newton se conoce como la Mecánica Clásica. Hay dos formulaciones de la Mecánica Clásica, ambas equivalentes a la formulación de Newton, con herramientas matemáticas diferentes que permiten desarrollos que con la formulación de Newton serían imposibles o difíciles de obtener o presentar. Nos referimos a la formulación Lagrangiana y la formulación Hamiltoniana. En este escrito nos enfocamos en la formulación Hamiltoniana, desarrollada por Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) (ver figura 3), la cual describimos en la siguiente sección.

3. Una reformulación de la Mecánica de Newton: La Mecánica Hamiltoniana

Figura 3. La Mecánica de Newton y la de Hamilton son dos formulaciones equivalentes.

El movimiento de un sistema físico en la formulación Hamiltoniana es descrito por una trayectoria en el llamado espacio fase, en el que cada punto tiene coordenadas de posición y velocidad, o para ser más exactos, de posición y momento lineal (el momento lineal es la masa de la partícula multiplicada por su velocidad), las cuales se denotan generalmente por $(q^1,q^2,\ldots,q^n,p_1,p_2,\ldots,p_n)$, aquí el número n se denomina número de grados de libertad del sistema y viene determinado por el número de partículas del sistema y el espacio donde se mueven, por ejemplo, consideremos un sistema con cuatro partículas moviéndose en el espacio tridimensional, en este caso necesitamos tres coordenadas de posición para cada partícula, así que el número de grados de libertad del sistema sería $n = (4)(3) = 12$.

Las ecuaciones de movimiento en la formulación Hamiltoniana son las llamadas ecuaciones de movimiento de Hamilton (Abraham, 2019), éstas forman un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en las variables dependientes $(q^1,q^2,\ldots,q^n,p_1,p_2,\ldots,p_n)$ de la variable independiente t, de forma explícita:

$$\begin{cases} \dot{q}^1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \quad\vdots \\ \dot{q}^n = \dfrac{\partial H}{\partial p_n}, \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q^1}, \\ \quad\vdots \\ \dot{p}_n = -\dfrac{\partial H}{\partial q^n} \end{cases} \tag{5}$$

Ecuaciones de Hamilton

En las ecuaciones de Hamilton, el punto arriba de cada variable denota la derivada con respecto del tiempo y $H = H(q^1,q^2,\ldots,q^n,p_1,p_2,\ldots,p_n,t)$ es una función llamada la Hamiltoniana del sistema.

Para un sistema físico la Hamiltoniana es la energía total del sistema, es decir, la suma de la energía cinética y la energía potencial, explícitamente

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2) + V(q^1, q^2, \ldots, q^n), \tag{6}$$

donde la primera parte de la suma corresponde a la energía cinética y la segunda parte es la energía potencial del sistema (Goldstein, 2011). Por ejemplo, para una partícula en caída libre ($n = 1, q^1 = y, p_1 = m\frac{dy}{dt}$) la energía potencial es mgy (m es la masa de la partícula, y es la variable altura y g es la constante gravitatoria).

4. La energía no se crea ni se destruye, solo se transforma

Existe un principio fundamental en la Física, el principio de la conservación de la energía, el cual establece que la energía total de un sistema cerrado (sin interferencia externa) se conserva, es decir, no cambia a lo largo de la trayectoria del sistema. En el caso de la formulación Hamiltoniana, si la energía potencial V(q) no depende del tiempo, entonces la Hamiltoniana del sistema es una cantidad conservada (Arnold, 2006).

Observación: la existencia de cantidades conservadas para un sistema físico permite resolver de forma más sencilla las ecuaciones de movimiento, o al menos permite reducir el número de ecuaciones a resolver (*ver secciones 5 y 6*).

5. Encontrando trayectorias con operaciones algebraicas elementales

Para la formulación Hamiltoniana, se estableció que la existencia de suficientes cantidades conservadas para un sistema físico permite resolver las ecuaciones de movimiento con operaciones algebraicas (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, raíces) y calculando integrales de ciertas funciones conocidas. El marco teórico que establece el resultado anterior se conoce como integrabilidad de sistemas Hamiltonianos (Arnold, 2006; Azuaje, 2022; Escobar-Ruiz, 2024); a continuación, haremos un desarrollo un poco más formal de este marco teórico. Consideremos un sistema físico con función Hamiltoniana $H\ (q^1,q^2,\ldots,q^n,p_1,p_2,\ldots,p_n,t)$. El paréntesis de Poisson, nombrado así en honor del matemático Frances Siméon Denis Poisson (1781-1840), entre dos cantidades $f\ (q^1,q^2,\ldots,q^n,p_1,p_2,\ldots,p_n,t)$ y $g\ (q^1,q^2,\ldots,q^n,p_1,p_2,\ldots,p_n,t)$ se define por:

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial q^i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right). \quad (7)$$

Decimos que las dos cantidades f y g están en involución si $\{f, g\} = 0$. Se tiene que una cantidad f es conservada si:

$$\{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

El resultado principal de la teoría de integrabilidad de sistemas Hamiltonianos establece que, si para un sistema se tiene el mismo número de grados de libertad que cantidades conservadas en involución entonces el sistema es integrable, es decir, las ecuaciones de movimiento se pueden resolver con operaciones algebraicas (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, raíces) y calculando integrales de ciertas funciones conocidas.

La teoría de integrabilidad de sistemas Hamiltonianos representa un hito enorme para la resolución de las ecuaciones de movimiento de un sistema físico, ya que en general resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias puede ser un trabajo tan complicado que incluso puede ser imposible. Pero resulta que hay un marco que permite ir más allá en simplicidad, en el que se pueden encontrar soluciones de las ecuaciones de movimiento de un sistema físico solo con operaciones algebraicas,

¡guau! Esto es increíble, si creías que solo un doctor con años de estudios en ecuaciones diferenciales, geometría, y otras áreas, era capaz de describir matemáticamente el movimiento de planetas, satélites u otros objetos de interés, te decimos que no es así.

La integrabilidad de un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad requiere la existencia de ese mismo número de cantidades conservadas, pero ¿qué pasa si es posible encontrar más cantidades conservadas? Esta idea ya ha sido estudiada y es la base para el marco de la superintegrabilidad. Consideremos un sistema Hamiltoniano con n grados de libertad, se dice que el sistema es superintegrable si tiene más de n cantidades conservadas independientes (Miller, 2013). El caso más interesante es el caso particular en el que se tienen $2n-1$ cantidades conservadas independientes, en este caso se dice que el sistema es maximalmente superintegrable. Es justamente para el caso de sistemas maximalmente superintegrables que es posible encontrar soluciones de las ecuaciones de movimiento solo con operaciones algebraicas (en lugar de resolver ecuaciones diferenciales).

6. El problema de Kepler en dos dimensiones: movimiento de la Luna, planetas y estrellas

El problema de Kepler estudia un sistema físico que consiste en dos cuerpos que interactúan entre sí con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Un caso particular es el de dos cuerpos celestes, como planetas, estrellas o incluso galaxias, atrayéndose mutuamente. Aquí presentamos este problema en dos dimensiones para el sistema Tierra-Sol. Debido a la gran diferencia en magnitud que hay entre la masa de la Tierra y la del Sol vamos a considerar para fines prácticos que el Sol tiene masa infinita y, por ende, está en reposo.

En coordenadas cartesianas $(q^1 = x,\ q^2 = y)$ en el espacio Euclideano dos dimensional $R^2\ (n = 2)$, la energía potencial es:

$$V(x,y) = \frac{-\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{9}$$

con $\alpha > 0$ una constante real. Por lo tanto, la función Hamiltoniana que describe el movimiento de la Tierra alrededor del Sol es:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) - \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{10}$$

donde $p_1 = p_x$ y $p_2 = p_y$ son los momentos canónicos a las variables x y y, respectivamente, y m denota la masa de la Tierra. Éste es un sistema Hamiltoniano superintegrable, en efecto, se tienen tres cantidades conservadas algebraicamente independientes entre sí (Miller, 2013). Estas cantidades son: la propia función Hamiltoniana H, el momento angular L_z

$$L_z = xp_y - yp_x\,, \tag{11}$$

y la última cantidad conservada es la componente x del llamado vector de Laplace-Runge-Lenz (físicamente describe la forma y orientación de las órbitas)

$$A_x \;=\; p_y\, L_z \;-\; \frac{m\alpha x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{12}$$

Tomando valores constantes de las tres cantidades conservadas, digamos

$$H = c_1\ ;\quad L_z = c_2\ ;\quad A_x = c_3\ , \tag{13}$$

quedan tres ecuaciones algebraicas de las cuatro variables (x, y, p_x, p_y), así que podemos eliminar dos variables usando dos de las ecuaciones. Como queremos encontrar la órbita del sistema, la cual se encuentra en el espacio Euclideano dos dimensional R^2 que tiene coordenadas *(x,y)*, entonces eliminamos las variables de momento p_x y p_y, y nos queda la siguiente ecuación únicamente de las variables x y y:

$$c_3^2(x^2+y^2) + 2\,m\,c_3\,\alpha\,x\sqrt{x^2+y^2} + c_4^2 + (m\alpha x)^2 - 2\,c_2^2\left(c_3 x + c_1 m y^2 + m\,\alpha\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0\,. \tag{14}$$

La ecuación anterior parece muy complicada, pero es una ecuación algebraica y se puede resolver (¡inténtalo!) sin mucha dificultad mediante operaciones sencillas (Hint: en lugar de despejar y despejemos y^2). De esta manera podemos obtener fácilmente la función $y = y\,(x)$. La ecuación (14) es uno de los resultados principales de este trabajo. Es importante mencionar que el presente desarrollo (basado en la superintegrabilidad) no aparece en los Libros estándar de Mecánica Clásica.

Al resolver las ecuaciones de Newton o de Hamilton para el problema de Kepler que estamos estudiando, obtendríamos las dos funciones $x = x\,(t)$, $y = y\,(t)$, a partir de las cuales podríamos determinar la función $y = y\,(x)$. Sin embargo, resolver las correspondientes ecuaciones diferenciales de Hamilton no es tan sencillo y, por supuesto, no es algo que se enseñe a nivel secundaria.

Vemos que, gracias a la existencia de las cantidades conservadas, en lugar de resolver ecuaciones diferenciales, es posible conocer a partir de la ecuación (14) la trayectoria $y = y\,(x)$ usando solo mates de secundaria.

Además, la ecuación (14) representa una sección cónica, es decir, una circunferencia, elipse, parábola o hipérbola; el tipo de sección cónica depende de los valores de las constantes c_1, c_2, c_3, es decir, depende de los valores que tomemos de las cantidades conservadas H, L_z, A_x.

Concretamente, tomando los valores $m = 1$, $\alpha = 1$ se tiene lo siguiente:

1. Si el valor de la cantidad conservada $H = c_1$ es positivo entonces la ecuación (14) representa hipérbolas (Figura 4):

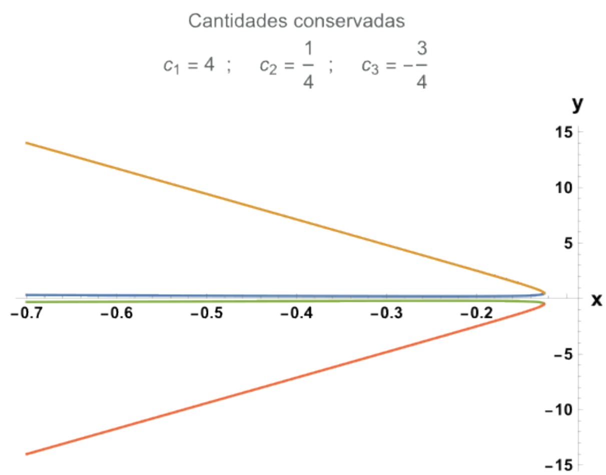

Figura 4. Cuando la energía $H = c_1 > 0$ es positiva las trayectorias son hipérbolas.

2. Si el valor de la cantidad conservada $H = c_1$ es cero entonces la ecuación (14) representa parábolas (Figura 5):

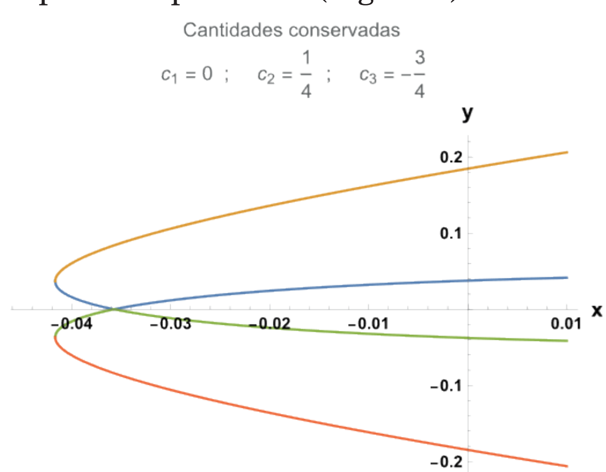

Figura 5. Cuando la energía $H = c_1 = 0$ es cero las trayectorias son parábolas.

3. Finalmente, si el valor de la cantidad conservada $H = c_1$ es negativo entonces la ecuación (14) representa elipses (Figura 6):

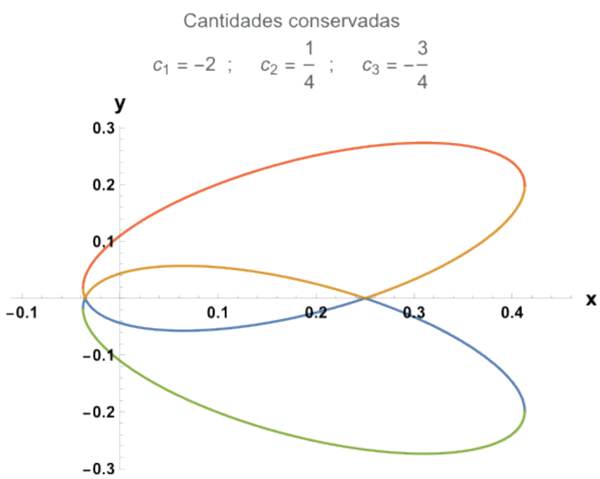

Figura 6. Cuando la energía $H = c_1 < 0$ es negativa las trayectorias son elipses.

Veamos un caso especial del problema de Kepler, pensemos en el sistema constituido por nuestro planeta Tierra y el Sol. Sabemos que la órbita de la Tierra alrededor del Sol forma una elipse, esto se explica con el desarrollo anterior debido a que en este caso el valor de la cantidad conservada H es negativo; en efecto, recordemos que la cantidad conservada H representa la energía total del sistema, es decir, la suma de la energía cinética y la energía potencial. En el caso general de movimiento de cuerpos celestes, la energía potencial es la energía gravitacional, la cual es negativa y, en el caso particular del sistema Tierra-Sol, dicha energía potencial es mayor (en valor absoluto) a la energía cinética. Por lo tanto, la energía total del sistema es negativa. Podríamos pensar en que pasaría si la energía cinética de la Tierra fuera mayor o igual al valor absoluto de la energía potencial, en ese caso, la energía total sería positiva o cero y, por lo tanto, la órbita sería una hipérbola o una elipse. Esto significa que la Tierra escaparía en algún momento de la atracción gravitacional del Sol y, en consecuencia, nuestro planeta dejaría de girar alrededor del Sol. Algo similar ocurre con el sistema luna-Tierra. Sería interesante explorar las consecuencias de que nuestro planeta escapara de la atracción gravitacional del Sol y, también de no tener una luna girando alrededor de nuestro planeta, aunque eso ya no es parte del objetivo de este escrito, por lo que lo dejamos como una pregunta para pensar e investigar sobre ella.

Existen sistemas superintegrables en Mecánica Cuántica que pueden ser consultados en (Miller, 2013; Escobar-Ruiz, 2021; Turbiner, 2023).

7. Conclusiones

Gracias a la existencia de cantidades conservadas es posible obtener la trayectoria de ciertos sistemas físicos sin tener que resolver ecuaciones diferenciales como la ecuación de Newton, las ecuaciones de Euler-Lagrange o las de Hamilton. En particular, en este texto se ha mostrado que es posible calcular la órbita de la Tierra alrededor del Sol con el uso de herramientas matemáticas que regularmente se enseñan en secundaria (operaciones algebraicas elementales como sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, exponenciales y radicales).

También se ha presentado una breve introducción a la formulación Hamiltoniana de la Mecánica Clásica, la cual sirve como fundamento para el desarrollo de la Mecánica Cuántica, así este texto podría ser un pequeño punto de partida para los lectores interesados en los fenómenos físicos a niveles atómicos.

Referencias:

Abraham R. and Marsden J. E., Foundations of Mechanics. American Mathematical Soc. No. 364, pp 161-199, 2008.

Arnold V. I., Kozlov V. V. and Neishtadt A. I, Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, Third Edition. Springer, pp 30-40, 2006.

Azuaje R., "*Solutions of the Hamilton equations for time-dependent Hamiltonian systems by means of solvable Lie algebras of symmetries*", Rep. Math. Phys., 89(2), pp. 221–230, 2022.

Escobar-Ruiz A. M. and Azuaje R., "*On particular integrability in classical mechanics*", J. Phys. A: Math. Theor. 57 105202, 2023.

Escobar-Ruiz A. M., Linares R. and Winternitz P., "*New infinite families of Nth-order superintegrable systems separating in Cartesian coordinates*", J. Phys. A: Math. Theor. 53 445203, 2020.

Goldstein H., Classical mechanics. Pearson Education, pp. 334-366, 2011.

Miller W. et al., "*Classical and quantum superintegrability with applications*", J. Phys. A: Math. Theor. 46 423001, 2013.

Turbiner A. V. and Escobar-Ruiz A. M., "*Two-body Coulomb problem and hidden g (2) algebra: superintegrability and cubic polynomial algebra*", Journal of Physics: Conference Series. Vol. 2667. 012075, 2023.