

**Más allá de un instante.
Memoria y no localidad en
cálculo fraccionario**

$$\left(x^2 + y \right) dx \cdot dy$$
$$\cos(x+y) dx$$

Dr. Jesús Enrique Escalante Martínez

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Universidad Veracruzana

Dr. Porfirio Toledo

Facultad de Matemáticas,
Universidad Veracruzana

Abstract

Fractional calculus emerges as a natural extension of classical calculus, extending its ability to model phenomena that depend not only on the current state, but also on the past and the environment. Unlike traditional models, fractional derivatives allow for capturing memory and spatial non-locality effects. Using a literary metaphor, the text argues that many real-world processes cannot be understood without considering their history. Some historical origins of fractional calculus and its current applications in modeling physical and technological phenomena are discussed. The aim is to show how these mathematical tools offer a deeper and more flexible view of the world, in which memory and non-local influences play a fundamental role.

Keywords: fractional calculus, memory in dynamical systems, non-locality, modeling of complex phenomena.

Resumen

El cálculo fraccionario surge como una extensión natural del cálculo clásico, ampliando su capacidad para modelar fenómenos que dependen no solo de su estado actual, sino también del pasado y del entorno. A diferencia de los modelos tradicionales, las derivadas fraccionarias permiten capturar efectos de memoria y de no localidad espacial. A través de una metáfora literaria, el texto plantea que muchos procesos reales no pueden entenderse sin considerar su historia. Se abordan algunos orígenes históricos del cálculo fraccionario y sus aplicaciones actuales en la modelación de fenómenos físicos y tecnológicos. El objetivo es mostrar cómo estas herramientas matemáticas ofrecen una visión más profunda y flexible del mundo, en la que la memoria y las influencias no locales juegan un papel fundamental.

Palabras clave: cálculo fraccionario, memoria en sistemas dinámicos, no localidad, modelado de fenómenos complejos.

¿Y si el pasado pudiera cambiar el destino?

Hay una novela poco conocida, pero profundamente reveladora, llamada *La extraña vida de Iván Osokin*. (Ouspensky, 1947). En ella, el protagonista, abrumado por una vida llena de fracasos y arrepentimientos, acude a un mago que le concede un deseo inusual: volver al pasado, con todos sus recuerdos intactos, con la intención de enmendar errores y cambiar su destino. Pero ocurre algo inesperado: a pesar de saber lo que viene, Iván repite los mismos actos. Deja pasar las oportunidades, elige mal, y una vez más, fracasa. Al final, reconoce su impotencia para cambiar, convencido de que está condenado a un destino inalterable... , salvo que algún día logre tomar decisiones realmente conscientes. Aunque estas, claro está, podría tomarlas sin tener que viajar al pasado.

Una herramienta matemática muy utilizada para describir fenómenos en diversas áreas, como la biología, física, química, economía, etc., son las ecuaciones diferenciales ordinarias. De algún modo, estas ecuaciones se comportan como Iván Osokin: describen sistemas cuyo estado futuro depende únicamente del presente, sin posibilidad de corrección basada en el pasado. La evolución está fijada por un conjunto de reglas que actúan en un instante: no hay lugar para el recuerdo, ni para la historia.

Pero ¿qué ocurriría si un sistema pudiera *recordar*? Si, como Osokin, pudiera volver sobre sus pasos y

aprender del camino recorrido, ¿tendría una segunda oportunidad para cambiar de rumbo, a diferencia de nuestro protagonista? Los sistemas descritos por derivadas fraccionarias introducen esa posibilidad. No están atados a un destino rígido: son sistemas con memoria, capaces de integrar información del pasado en su evolución presente. Esta característica permite modelar con mayor realismo diversos fenómenos naturales, especialmente aquellos en los que el presente no puede explicarse sin una referencia a la historia del sistema. Gracias a ello, ofrecen la capacidad de adaptarse, reaccionar con mayor inteligencia y, en cierto sentido, escapar del determinismo clásico.



Figura 1: Interacción con un fluido no newtoniano mostrando su ruptura bajo tensión rápida. Wolfram Burner, Ripping Non-Newtonian Fluids, Flickr. Imagen licenciada bajo CC BY-NC 2.0.

En numerosas dinámicas de la naturaleza se encuentran evidencias de que el pasado influye en el devenir del sistema, de una forma que podríamos describir como un “efecto de memoria”. Este tipo de comportamiento se observa, por ejemplo, en los fluidos viscoelásticos: materiales que no solo fluyen como un líquido, sino que también almacenan energía como un sólido elástico.

Este tipo de dependencia histórica no

puede ser capturada adecuadamente por las ecuaciones diferenciales ordinarias, que suponen que el estado futuro de un sistema depende únicamente de su estado actual. En cambio, las ecuaciones diferenciales fraccionarias permiten incorporar memoria en su estructura matemática: sus derivadas no enteras se definen a través de integrales que “acumulan” información del pasado, ponderándola según su núcleo (kernel), el cual puede tener diversas formas.

Por otro lado, existen fenómenos que tampoco pueden describirse correctamente si asumimos que las interacciones son únicamente locales. En particular, a escalas astronómicas, la gravedad parece no comportarse según las leyes clásicas de Newton, a menos que se introduzca materia oscura como una hipótesis auxiliar. Sin embargo, una alternativa interesante es asumir que la gravedad misma tiene efectos no locales, es decir, que un punto del espacio puede influir a otro distante, sin necesidad de una interacción local. En este contexto, el uso de derivadas fraccionarias, en particular, aquellas definidas mediante la transformada de Fourier, permite modelar de forma coherente estos efectos a larga distancia (Borjón-Espejel *et al.*, 2022).

En ambos casos, ya sea por el recuerdo del pasado o por las influencias que viajan más allá de un entorno local, las derivadas fraccionarias se presentan como herramientas eficaces para capturar la complejidad de sistemas que la matemática clásica no logra describir por completo.

Una ecuación diferencial clásica describe cómo cambia una cantidad en función del tiempo o el espacio, utilizando derivadas de orden entero como la velocidad (primera derivada) o la

aceleración (segunda derivada). Estas derivadas se calculan a partir del comportamiento local de la función, es decir, dependen exclusivamente de su valor y variación en un punto específico. Por ejemplo, para predecir el futuro de un sistema mecánico, basta conocer su posición y velocidad actuales. No importa cómo llegó hasta allí, su pasado no influye. Este enfoque local funciona bien en muchos contextos, pero resulta insuficiente cuando la evolución del sistema depende de su historia o por efectos distribuidos en el espacio. Para esos casos, las ecuaciones diferenciales fraccionarias ofrecen un marco más adecuado y profundo para modelar la complejidad de la realidad.

Ecuaciones diferenciales fraccionarias. Una mirada más profunda al cambio

La palabra “fraccionaria” puede sonar extraña en el contexto de las derivadas. Si una derivada de primer orden mide la velocidad de cambio, y una de segundo orden mide la aceleración, ¿qué significa una derivada de orden $1/2$? ¿Qué tipo de cambio describe?

La idea detrás de una derivada fraccionaria es sorprendentemente natural, ya que generaliza el concepto clásico de derivada a órdenes no enteros. Esto implica que ya no se calcula a partir de la información puntual de una función, sino que incluye una especie de “promedio” del comportamiento pasado. Por esta razón, las derivadas fraccionarias están íntimamente relacionadas con la memoria: cuando se aplican en una ecuación, hacen que el futuro de un sistema no dependa solo del presente, sino también de su historia.

Podemos encontrar diversas definiciones de derivadas fraccionarias, como la

de Caputo o la de Riemann-Liouville; estas se expresan como integrales que acumulan el valor de la función en un intervalo pasado. Esta acumulación no es uniforme: depende de un *núcleo* (kernel) que asigna distintos pesos a los momentos previos, permitiendo modelar desde olvidos rápidos hasta memorias persistentes.

Pero la historia no termina en el tiempo: cuando la variable independiente representa el espacio, estas derivadas también introducen no localidad. En lugar de depender solo de valores cercanos (como lo hacen las derivadas ordinarias), las derivadas fraccionarias espaciales permiten que lo que ocurre en un punto esté influido por regiones lejanas.

Orígenes del Cálculo Fraccionario. Un viaje a los siglos XVII y XVIII



Figura 2: Retrato de Gottfried Wilhelm Leibniz, por Francke, B. C. (ca. 1720). Museo Herzog Anton Ulrich, Brunswick, Alemania. Imagen en dominio público, Wikimedia Commons.

La semilla del cálculo fraccionario se plantó en 1695, en la correspondencia que sostenían Guillaume de L'Hôpital y Gottfried Leibniz. En relación con la derivada n -ésima de una función, se puede leer la siguiente pregunta: “¿Qué sucedería si n fuera $1/2$?”. El mismo Leibniz respondió con optimismo: aunque admitió que parecía una paradoja, predijo que algún día se extraerían “consecuencias útiles” de esa idea. Así, sin saberlo, ambos estaban abriendo la puerta a un nuevo mundo matemático.



Figura 3: Retrato de Guillaume François Antoine, Marqués de L'Hôpital (1661–1704). Grabado realizado por Gérard Edelinck, basado en un diseño de Nicolas Fouché. Imagen de acceso abierto, por Wellcome Collection, bajo licencia CC BY 4.0.

Durante décadas, las derivadas fraccionarias fueron un ejercicio teórico. Hasta que, en 1823, el noruego Niels Henrik Abel las usó para resolver un problema físico fascinante: la tautócrona

(del griego “tiempo igual”). Este desafío, propuesto por Christiaan Huygens en el siglo XVII, consistía en encontrar una curva donde un objeto, al deslizarse sin fricción, tardara el mismo tiempo en llegar al fondo sin importar desde qué altura comenzara. La solución clásica era una cicloide, pero Abel abordó el problema desde otro ángulo.



Figura 4: Representación física de una rampa tautócrona, diseñada con la forma de una cicloide invertida. Objetos que se deslizan desde distintos puntos alcanzan el extremo inferior en el mismo tiempo. Matemateca (IME-USP). Imagen licenciada bajo CC BY-SA 4.0.

Al modelar el tiempo de caída, Abel se topó con una ecuación integral que involucraba un término de la forma $(x - t)^{(1/2)}$. Sin saberlo, estaba usando una integral fraccionaria de orden $1/2$, un concepto que hoy asociamos con la derivada de Riemann-Liouville. Para resolverla, Abel aplicó una técnica revolucionaria: operó ambos lados de la ecuación con una “derivada fraccionaria” de orden $1/2$, simplificando el problema y demostrando que el cálculo fraccionario no era solo un desarrollo teórico, sino una herramienta práctica.

Aplicaciones en el mundo real: ¿para qué sirve esto?

Las ecuaciones diferenciales fraccionarias no son solo un concepto curioso para matemáticos, son herramientas útiles

para entender fenómenos complejos del mundo real que desafían los modelos tradicionales. Algunos de los ejemplos más fascinantes provienen directamente de la naturaleza. Muchos sistemas biológicos y físicos —como las redes neuronales, el sistema cardiovascular, los árboles, los ríos y hasta las formaciones de nubes— comparten una propiedad sorprendente: su estructura se repite a diferentes escalas. A este patrón repetitivo se le llama *autosimilitud* o *estructura fractal*, y refleja un orden oculto en lo que a primera vista parece caótico. Es como si la naturaleza hablara en eco, repitiendo sus formas a distintas escalas, desde una ramita hasta un bosque entero. Capturar matemáticamente este tipo de organización no es sencillo, pero el cálculo fraccionario ofrece una forma elegante y poderosa de conectar la forma (estructuras fractales, materiales complejos) con el comportamiento (respuesta dinámica, difusión, amortiguamiento).



Figura 5: Corrosión anatómica de los pulmones de un ciervo rojo. La resina amarilla muestra la estructura interna de las vías aéreas tras la eliminación del tejido pulmonar circundante. Michael Frank, Corrosion cast of a red deer's lung, Royal Veterinary College. Imagen de acceso abierto, Wellcome Collection, bajo licencia CC BY 4.0.

Imagina el tejido pulmonar, en el sistema respiratorio, en donde las vías aéreas y los vasos sanguíneos en los pulmones no siguen una forma regular. Encontramos ramas que se dividen en ramas, que a su vez se vuelven a dividir, siguiendo patrones que se repiten de forma similar en diferentes niveles, ramificándose como árboles fractales. Lo mismo ocurre en el sistema circulatorio. Este tipo de geometría recursiva hace muy difícil construir modelos precisos usando ecuaciones comunes. El cálculo fraccionario permite establecer un vínculo entre la forma en que están organizadas estas estructuras y cómo funcionan dinámicamente, como si la forma misma determinara el comportamiento.

Las características anteriores no solo se observan en los organismos vivos. Algunos materiales diseñados por humanos también presentan efectos de memoriaz estructuras complejas. Es el caso de los materiales inteligentes, como los fluidos magnetorreológicos, que cambian su viscosidad cuando se les aplica un campo magnético (Escalante-Martínez *et al.*, 2020). Estos materiales se están utilizando, por ejemplo, en sistemas de aislamiento sísmico para proteger estructuras durante un terremoto.

Otro ejemplo notable lo encontramos en el mundo de la electrónica. En los circuitos eléctricos clásicos usamos resistencias, capacitores e inductores, cada uno con un comportamiento bien

definido. Sin embargo, al estudiar materiales complejos o dispositivos a microescala, se han encontrado componentes cuyo comportamiento no encaja del todo con estos modelos. A estos elementos se les conoce como fractancias, y se comportan como si tuvieran una combinación fraccionaria de capacitancia e inductancia (Gómez Aguilar *et al.*, 2016). Es decir, su respuesta depende no solo de la señal que reciben en ese instante, sino también de cómo ha variado esa señal en el pasado.

Pensar el tiempo y el espacio de otra forma

Durante siglos, la matemática ha sido nuestra herramienta más precisa para describir el cambio. Las ecuaciones diferenciales de orden entero nos han ayudado a entender desde la caída de una manzana hasta la órbita de un planeta. Pero el mundo natural no siempre sigue caminos tan definidos. Hay sistemas que recuerdan, que acumulan historia, que están conectados a lo lejos. Frente a ellos, el lenguaje clásico puede no dar cuenta de su complejidad.

Las derivadas fraccionarias nos invitan a pensar los fenómenos dinámicos no como secuencias de eventos aislados, sino como tramas en la que el pasado puede influir de forma continua. Y el espacio, no como un conjunto de puntos independientes, sino como un tejido donde lo que ocurre en un lugar puede resonar en otro. Modelar con memoria y con no localidad es abrir la puerta a una comprensión más profunda, más coherente, más afín a la complejidad de los fenómenos reales.

Y así, volvemos a Iván Osokin. Como

él, muchos sistemas parecen estar atrapados en un destino fijo, repitiendo una y otra vez sus trayectorias. Pero, a diferencia de Osokin, que no lograba actuar diferente a pesar de recordar, los modelos fraccionarios ofrecen a los sistemas una posibilidad distinta: que la memoria no sea una condena, sino una herramienta para corregir y cambiar de rumbo. En este sentido, el cálculo fraccionario no es solo una extensión del cálculo clásico, sino una nueva forma de mirar el mundo. Una forma que reconoce que nada ocurre del todo aislado... ni del todo olvidado.

Referencias

- [1] Borjón-Espejel, S., *et al.*, Newtonian gravity and MOND: a fractional Fourier approach, *Indian Journal of Physics*, 96[12], pp. 3405-3411, 2022. <https://link.springer.com/article/10.1007/s12648-022-02296-1>
- [2] Escalante-Martínez, J. E., *et al.*, Fractional differential equation modeling of viscoelastic fluid in mass-spring-magnetorheological damper mechanical system, *The European Physical Journal Plus*, 135[847], pp. 1-14, 2020. <https://link.springer.com/article/10.1140/epjp/s13360-020-00802-0>
- [3] Gómez-Aguilar, J. F., *et al.*, Electrical circuits described by a fractional derivative with regular Kernel, *Revista Mexicana de Física*, 62[2], pp. 144-154, 2016. <https://rmf.smf.mx/ojs/index.php/rmf/article/view/4188>
- [4] Ouspensky, P. D., *La extraña vida de Iván Osokin*, Holme Press Inc., Nueva York, 1947.